SJ 08/09

Musterlösung zur 2. Klausur im Leistungskurs Mathematik (12/1)

1a) $V(a) = \pi \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)dx = \pi\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}\right]_1^a = \pi\left(\frac{1}{3a^3} - \frac{1}{a} - \frac{1}{3}+1\right) = \underline{\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{3}{a}+2\right)}$

b) $\lim\limits_{a\to\infty} V(a) = \lim\limits_{a\to\infty} \pi\left(\underbrace{\frac{1}{3a^3}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{a}}_{\to 0} + \frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$

Obwohl sich ~~das Volumen~~ der Rotationskörper ins Unendliche erstreckt, ist sein Volumen endlich.

c) $A(x) = \frac{\pi}{4}$; $\pi\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right) = \frac{\pi}{4}$; $x^4 - 4x^2+4=0$

Substitution: $z=x^2$; $z^2-4z+4=0$; $(z-2)^2=0$; $z=2$; Resub.: $x^2=2$; $\underline{\underline{x=\sqrt{2}}}$ $(x=-\sqrt{2} \notin D)$

2) Jedes Kind bekommt eine Tafel, die restlichen 7 Tafel werden dann mW, obdR auf die 3 Kinder verteilt.

$\Rightarrow \binom{7+3-1}{7} = \binom{9}{7} = \underline{\underline{36}}$ Möglichkeiten

3) $p=\frac{1}{3}$; $n=10$; X: Anzahl der richtigen Antworten

$P(X<2) = P(X=0)+P(X=1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + 10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9 = \underline{\underline{10{,}4\%}}$

4a) $\frac{10!}{2!3!5!} = \underline{\underline{2520}}$; b) $\underline{\underline{3!=6}}$; c) $\frac{\binom{5}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} = \underline{\underline{31\%}}$

5a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

• $k\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\t\end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix}-k=1\\2k=-2\\k=t\end{matrix}\right\} k=-1$ $\vec{u}_g$ und $\vec{u}_h$ sind linear abhängig für $t=-1$, sonst linear unabhängig

• $t=-1$: Punktprobe: $H\in g$? $\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix}\text{I } \lambda=3\\\text{II } \lambda=0{,}5\end{matrix}\right\}$ ↯ $\Rightarrow H\notin g$, $\underline{\text{also } g\parallel h \text{ für } t=-1}$

• $t\neq-1$: $\begin{vmatrix}-3 & -1 & 1\\1 & 2 & -2\\3 & 1 & t\end{vmatrix} = -5t-5 \neq 0$ für $t\neq-1$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{g \text{ und } h \text{ sind windschief}}}$ für $t\neq-1$

b)

$\vec{p}_1 = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a}) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\8/3\\1/3\end{pmatrix}$; $\underline{\underline{P_1\left(-\frac{1}{3}\middle|\frac{8}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)}}$

$\vec{p}_2 = \vec{a} + 2(\vec{b}-\vec{a}) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\8\\3\end{pmatrix}$; $\underline{\underline{P_2(-3|8|3)}}$

6a) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-a\\4-2a\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}a-2\\0\\2\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\text{I } 0=2-a+s(a-2)\\\text{II } 0=4-2a\\\text{III } 0=2+2s\end{matrix}$ $\left.\begin{matrix}\to a=2\\\to s=-1\end{matrix}\right\}$ in I $0=0$ ✓ Für $\underline{a=2}$ geht die Schargerade durch den Ursprung

b) $\begin{pmatrix}a-2\\0\\2\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}k=a-2\\k \text{ beliebig}\\2\neq0\end{matrix}$ ↯ es gibt $\underline{\text{keine Schargerade}}$, die parallel zur x_1-Achse ist

c) $\begin{pmatrix}2-a\\4-2a\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ Alle Punkte liegen auf der Geraden $\underline{\underline{k: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}}$