

Proportionalität**1. Gegeben sind die folgenden Zuordnungen:**

1)

x	-3	-1	0	0,5	2	4
y	9	3	0	-1,5	-6	-12
y : x	-3			-3		

2)

km/h	30	45	60	70	85	100
min	45	30	22,5			13,5
min · km/h		1350	1350			1350

3)

s	-2,5		3,3	7,2	8	9,1
t	-10	0	13,2		30	
t : s	4		4		3,75	

4)

kg	0,1	0,35	0,8	1,3	1,7	2
€	0,45	15,8	3,6	6,8	7,65	9
€ : kg	4,5		4,5			

a) Nachweis der Proportionalität: Berechne, ob Quotienten- oder Produktgleichheit besteht

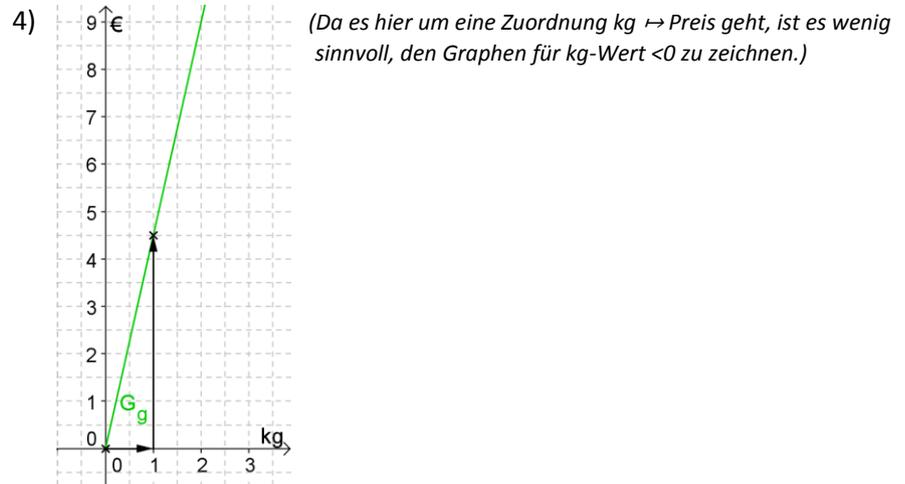
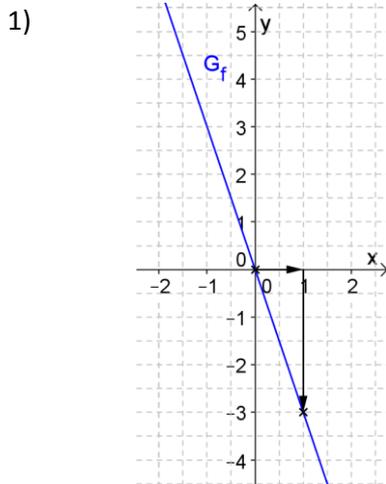
- 1) Quotientengleichheit (Quotient $q = -3$) \rightarrow proportionale Zuordnung
- 2) Produktgleichheit (Produkt $p = 1350$) \rightarrow umgekehrt proportionale Zuordnung
- 3) keine Quotienten- oder Produktgleichheit \rightarrow weder proportional noch umgekehrt proportional
- 4) Quotientengleichheit (Quotient $q = 4,5$) \rightarrow proportionale Zuordnung

b) Zuordnungsvorschrift: proportional $x \mapsto q \cdot x$, umgekehrt proportional $x \mapsto p : x$

- 1) $x \mapsto (-3) \cdot x$ oder $x \mapsto -3x$
- 2) $x \mapsto 1350 : x$
- 3) ----
- 4) $x \mapsto 4,5 \cdot x$ oder $x \mapsto 4,5x$

c) Allgemeine Form der proportionalen Funktion: $x \mapsto m \cdot x$, der Graph geht durch (0|0) und (1|m)

- 1) $x \mapsto -3x \rightarrow m = -3$ \rightarrow Graph geht durch (0|0) und (1|-3)
- 4) $x \mapsto 4,5x \rightarrow m = 4,5$ \rightarrow Graph geht durch (0|0) und (1|4,5)

**2. Gegeben sind die folgenden Zuordnungen:**

- 1) Seitenlänge eines Quadrats \mapsto Flächeninhalt des Quadrats
- 2) Radius eines Kreises \mapsto Umfang des Kreises
- 3) Geschwindigkeit \mapsto Benötigte Zeit in Stunden für eine Strecke von 80 km
- 4) $z \mapsto 3,5 + 2z$
- 5) $x \mapsto 7 : x$

a) 1) $x \mapsto x^2$ 2) $r \mapsto 2\pi r$ 3) $x \mapsto 80 : x$

b) 1)

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x²	0,25	1	2,25	4	6,25	9

2)

r	0,5	1	1,5	2	2,5	3
2πr	3,1	6,3	9,4	12,6	15,7	18,8

3)

x	20	30	40	50	60	70
80 : x	4	2,7	2	1,6	1,3	1,1

4)

z	-2	-1	0	1	2	3
3,5 + 2z	0,5	1,5	3,5	5,5	7,5	9,5

5)

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
7:x	14	7	4,7	3,5	2,8	2,3

3. Gegeben sind die Graphen zweier proportionalen (bzw. umgekehrt proportionalen) Zuordnungen. Erstelle für jeden Graphen eine Wertetabelle mit den markierten Punkten und gib die zugehörige Zuordnungsvorschrift an.

Funktion f:

x	0,5	1	1,5	2	3
y	1,25	2,5	3,75	5	7,5

Quotient: $q = y : x = 2,5 \rightarrow x \mapsto 2,5x$

Funktion g:

x	0,5	1	2	3	4
y	4	2	1	0,66	1

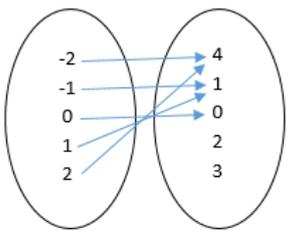
Produkt: $p = y \cdot x = 4 \rightarrow x \mapsto 4 : x$

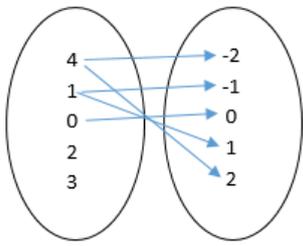
Funktionen

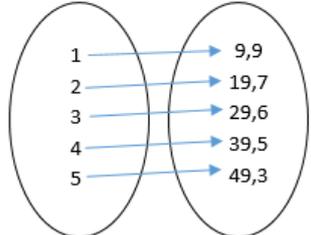
4. Gegeben sind die folgenden Zuordnungen:

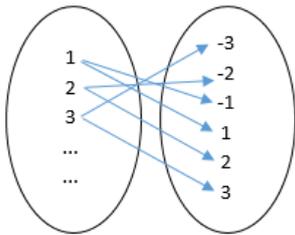
- 1) Zahl \mapsto Quadrat der Zahl
- 2) Quadrat einer Zahl \mapsto Zahl
- 3) Radius eines Kreises \mapsto Fläche des Kreises
- 4) Betrag einer Zahl \mapsto Zahl

a) 1) $x \mapsto x^2$ 2) $x^2 \mapsto x$ 3) $r \mapsto r^2\pi$ 4) $|x| \mapsto x$

b) 1)  Jedem Element aus der Ursprungsmenge wird genau ein Element aus der Wertemenge zugeordnet \rightarrow Die Zuordnung ist eine Funktion

2)  Mehreren Elementen aus der Ursprungsmenge werden mehrere Elemente aus der Wertemenge zugeordnet \rightarrow Die Zuordnung ist keine Funktion

3)  Jedem Element aus der Ursprungsmenge wird genau ein Element aus der Wertemenge zugeordnet \rightarrow Die Zuordnung ist eine Funktion

4)  Jedem Element aus der Ursprungsmenge wird genau ein Element aus der Wertemenge zugeordnet \rightarrow Die Zuordnung ist eine Funktion

5. Gib jeweils den Funktionsterm und die maximale Definitionsmenge an:

- 1) $g : \text{Zahl} \mapsto \text{fünffache Zahl}$ $g(x) = 5x$ $D_{\max} = \mathbb{Q}$
- 2) $h: \text{Zahl} \mapsto \text{Kehrwert der um zwei verminderten dreifachen Zahl}$ $h(x) = \frac{1}{3x-2}$ $D_{\max} = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{2}{3}\}$
- 3) $f: \text{Zahl} \mapsto \text{Summe aus der Zahl und dem Kehrwert der doppelten Zahl}$ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $D_{\max} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

6. Gib jeweils die zur Wertetabelle zugehörige Funktionsgleichung an.

x	-2	-1	0	3	10	13,5
y	5	2,5	0	-7,5	-25	-33,75

$y = -2,5x$

s	-3	-1	0	3	4	4,5
t	4	6	7	10	11	11,5

$t = s + 7$

7. Bestimme jeweils rechnerisch, ob die Punkte S(1|3) und P(2,5|4) auf, oberhalb oder unterhalb des Graphen liegen.

1) $f: x \mapsto 2x + 1$

Punkt S: $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

→ S liegt auf G_f

Punkt P: $f(2,5) = 2 \cdot 2,5 + 1 = 6 > 4$

→ P liegt unterhalb von G_f

2) $g: x \mapsto \frac{1}{5}x + 3,5$

Punkt S: $g(1) = \frac{1}{5} \cdot 1 + 3,5 = 3,7 > 3$

→ S liegt unterhalb von G_g

Punkt P: $g(2,5) = \frac{1}{5} \cdot 2,5 + 3,5 = 4$

→ P liegt auf G_g

3) $h: x \mapsto \frac{2}{x-0,5} - 4$

Punkt S: $h(1) = \frac{2}{1-0,5} - 4 = 0 < 3$

→ S liegt oberhalb von G_h

Punkt P: $h(2,5) = \frac{2}{2,5-0,5} - 4 = -3 < 4$

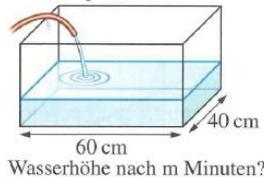
→ P liegt oberhalb von G_h

8. Gib zur dargestellten Situation jeweils einen Funktionsterm an.

1) In 14 Tagen
2 mm länger



2) 12 l pro Minute



3) 15 ct
pro Minute

Grund-
gebühr
5 €



Gebühr nach
x Minuten
Gesprächsdauer?

1) Länge zu Beginn: 12 mm; Wachstum pro Woche: 1 mm

Nach 0 Wochen: $0 \mapsto 12 \text{ mm} + 0 \cdot 1 \text{ mm}$

Nach 1 Woche: $1 \mapsto 12 \text{ mm} + 1 \cdot 1 \text{ mm} = 13 \text{ mm}$

Nach 2 Wochen: $2 \mapsto 12 \text{ mm} + 2 \cdot 1 \text{ mm} = 14 \text{ mm}$

....

Nach w Wochen: $w \mapsto 12 \text{ mm} + w \cdot 1 \text{ mm}$

2) Füllhöhe zu Beginn: 0 cm; Volumen pro 1 cm Wasserhöhe: $60 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 2400 \text{ cm}^3 = 2,4 \text{ l}$
→ $2,4 \text{ l} \hat{=} 1 \text{ cm}$ → $12 \text{ l} \hat{=} 5 \text{ cm}$

Nach 1 Minute: $1 \mapsto 12 \text{ l} = 5 \cdot 2,4 \text{ l}$ → $1 \mapsto 5 \cdot 1 \text{ cm} = 5 \cdot 1 \cdot 1 \text{ cm}$

Nach 2 Minuten: $2 \mapsto 24 \text{ l} = 10 \cdot 2,4 \text{ l}$ → $1 \mapsto 10 \cdot 1 \text{ cm} = 5 \cdot 2 \cdot 1 \text{ cm}$

Nach 3 Minuten: $3 \mapsto 36 \text{ l} = 15 \cdot 2,4 \text{ l}$ → $1 \mapsto 15 \cdot 1 \text{ cm} = 5 \cdot 3 \cdot 1 \text{ cm}$

....

Nach m Minuten: $m \mapsto 5 \cdot m \cdot 1 \text{ cm}$

3) Gebühr zu Beginn: 5 €; Gebühr pro Minute: 0,15 €

Nach 0 Minuten: $0 \mapsto 5 \text{ €} + 0 \cdot 0,15 \text{ €}$

Nach 1 Minute: $1 \mapsto 5 \text{ €} + 1 \cdot 0,15 \text{ €} = 5,15 \text{ €}$

Nach 2 Minuten: $2 \mapsto 5 \text{ €} + 2 \cdot 0,15 \text{ €} = 5,30 \text{ €}$

....

Nach x Minuten: $x \mapsto 5 \text{ €} + x \cdot 0,15 \text{ €}$

9. Bestimme (falls vorhanden) rechnerisch die Nullstellen der Funktionen:

1) $f(x) = 3x$

$$\begin{array}{lcl} \text{Setze } f(x) = 0: & 3x = 0 & \\ \text{Löse nach } x \text{ auf:} & 3x = 0 & | :3 \\ & x = 0 & \end{array}$$

→ f besitzt eine Nullstelle bei $x = 0$

2) $g(x) = 4x - 2$

$$\begin{array}{lcl} \text{Setze } g(x) = 0: & 4x - 2 = 0 & \\ \text{Löse nach } x \text{ auf:} & 4x - 2 = 0 & | + 2 \\ & 4x = 2 & | : 4 \\ & x = 0,5 & \end{array}$$

→ g besitzt eine Nullstelle bei $x = 0,5$

3) $h(x) = 2x^2 - 8$

$$\begin{array}{lcl} h(x) = 0: & 2x^2 - 8 = 0 & | + 8 \\ & 2x^2 = 8 & | : 2 \\ & x^2 = 4 & \end{array}$$

→ h besitzt die beiden Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

4) $k(x) = -(3x + 0,5) - 0,5$

$$\begin{array}{lcl} k(x) = 0: & -(3x + 0,5) - 0,5 = 0 & \\ & -3x - 0,5 - 0,5 = 0 & \\ & -3x - 1 = 0 & | + 1 \\ & -3x = 1 & | : (-3) \\ & x = -\frac{1}{3} & \end{array}$$

(Tipp: Hier zuerst den Term links vereinfachen)

→ k besitzt eine Nullstelle bei $x = -\frac{1}{3}$

5) $m(x) = 5$

$$m(x) = 0: \quad 5 = 0 \quad \text{⚡}$$

→ m besitzt keine Nullstelle

6) $r(x) = \frac{1}{2+x} - 1$

$$\begin{array}{lcl} r(x) = 0: & \frac{1}{2+x} - 1 = 0 & | + 1 \\ & \frac{1}{2+x} = 1 & | \cdot (2+x) \\ & 1 = 1 \cdot (2+x) & \\ & 1 = 2 + x & | - 2 \\ & -1 = x & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Wichtig: Um das } x \text{ aus dem Nenner eines Bruchs} \\ \text{zu „entfernen“, muss mit dem gesamten Term im} \\ \text{Nenner multipliziert werden!)} \end{array}$$

→ r besitzt eine Nullstelle bei $x = -1$

7) $s(x) = x^2 + 7$

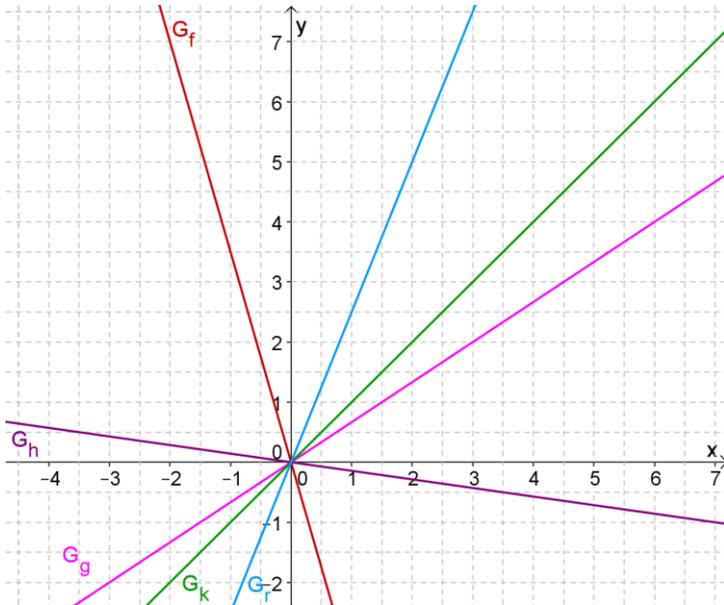
$$\begin{array}{lcl} s(x) = 0: & x^2 + 7 = 0 & | - 7 \\ & x^2 = -7 & \end{array} \quad \text{⚡}$$

→ s besitzt keine Nullstelle

11. Gib den Term einer Funktion an, die

- 1) genau eine Nullstelle besitzt z.B. $f(x) = 2x$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x^2$
- 2) keine Nullstelle besitzt z.B. $f(x) = 3$, $f(x) = x^2 + 5$

10. Bestimme zu jedem Graphen die Steigung und den zugehörigen Funktionsterm:



Funktion f: $m = \frac{-3,5}{1} = -\frac{7}{2} \rightarrow f(x) = -\frac{7}{2}x$

Funktion g: $m = \frac{2}{3} \rightarrow g(x) = \frac{2}{3}x$

Funktion h: $m = \frac{-1}{7} = -\frac{1}{7} \rightarrow h(x) = -\frac{1}{7}x$

Funktion k: $m = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow k(x) = x$

Funktion r: $m = \frac{2,5}{1} = \frac{5}{2} \rightarrow r(x) = \frac{5}{2}x$

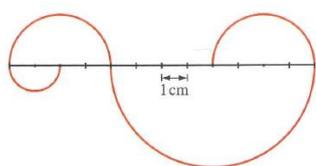
(Allgemein bei proportionalen Funktionen: $m = \frac{y}{x}$ und $f(x) = m \cdot x$)

Berechnungen am Kreis

11. Ergänze die fehlenden Werte in der Wertetabelle. Runde ggf. auf 1 Nachkommastelle.

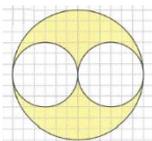
r in cm	0	1	0,5	1,5	4	14
U in cm	0	6,3	3,14	2,4	25,1	88,0
A in cm ²	0	3,1	0,8	7,1	50,3	615,8

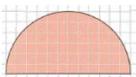
12. Berechne die Länge der Linie.

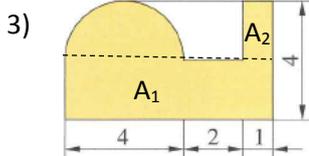


$$L = \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{2}U_2 + \frac{1}{2}U_3 + \frac{1}{2}U_4 = \frac{1}{2}(2\pi r_1) + \frac{1}{2}(2\pi r_2) + \frac{1}{2}(2\pi r_3) + \frac{1}{2}(2\pi r_4) = \frac{1}{2}(2\pi \cdot 1\text{cm}) + \frac{1}{2}(2\pi \cdot 2\text{cm}) + \frac{1}{2}(2\pi \cdot 4\text{cm}) + \frac{1}{2}(2\pi \cdot 2\text{cm}) = 28,3 \text{ cm}$$

13. Berechne jeweils Flächeninhalt und Umfang der farbigen Fläche.

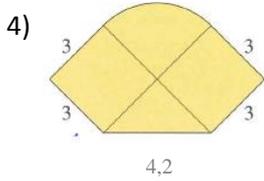
1)  $A_{\text{farbig}} = A_{\text{groß}} - 2A_{\text{klein}} = \pi \cdot (r_{\text{groß}})^2 - 2 \cdot \pi \cdot (r_{\text{klein}})^2 = \pi \cdot (3\text{cm})^2 - 2 \cdot \pi \cdot (1,5\text{cm})^2 = 14,1 \text{ cm}^2$
 $U_{\text{farbig}} = U_{\text{groß}} + 2U_{\text{klein}} = 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{groß}} + 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{klein}} = 2 \cdot \pi \cdot 3\text{cm} + 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1,5\text{cm} = 37,7 \text{ cm}$

2)  $A = \frac{1}{2}A_{\text{Kreis}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (r_{\text{Kreis}})^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (3\text{cm})^2 = 14,1 \text{ cm}^2$
 $U = \frac{1}{2}U_{\text{Kreis}} + 2r_{\text{Kreis}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{Kreis}} + 2 \cdot r_{\text{Kreis}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3\text{cm} + 2 \cdot 3 \text{ cm} = 15,4 \text{ cm}$



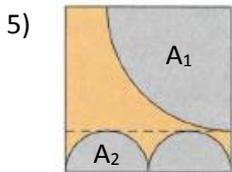
$$A = \frac{1}{2}A_{\text{Kreis}} + A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (r_{\text{Kreis}})^2 + 5\text{cm} \cdot 2\text{cm} + 1\text{cm} \cdot 2\text{cm} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2\text{cm})^2 + 10\text{cm}^2 + 2\text{cm}^2 = 18,3 \text{ cm}^2$$

$$U = \frac{1}{2}U_{\text{Kreis}} + 2\text{cm} + 5\text{cm} + 4\text{cm} + 1\text{cm} + 2\text{cm} + 2\text{cm} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (2\text{cm}) + 16\text{cm} = 22,3 \text{ cm}$$



$$A = 2A_{\text{Quadrat}} + A_{\text{Dreieck}} + \frac{1}{4}A_{\text{Kreis}} = 2 \cdot (3\text{cm})^2 + \frac{1}{2} \cdot (3\text{cm})^2 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (3\text{cm})^2 = 29,6 \text{ cm}^2$$

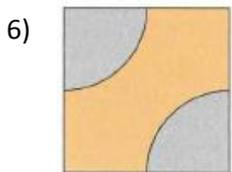
$$U = 4 \cdot 3\text{cm} + 4,2\text{cm} + \frac{1}{4}U_{\text{Kreis}} = 12\text{cm} + 4,2\text{cm} + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (3\text{cm}) = 20,9 \text{ cm}$$



Seitenlänge: 8 cm

$$A_{\text{farbig}} = A_{\text{Quadrat}} - \frac{1}{4}A_1 - 2 \cdot A_2 = (8\text{cm})^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (3\text{cm})^2 - 2 \cdot \pi \cdot (1\text{cm})^2 = 46,7 \text{ cm}^2$$

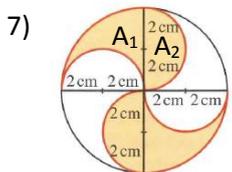
$$U_{\text{farbig}} = 8\text{cm} + U_{\text{klein}} + 1\text{cm} + \frac{1}{4}U_{\text{groß}} + 1\text{cm} = 10\text{cm} + 2 \cdot \pi \cdot 1\text{cm} + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3\text{cm} = 17,9 \text{ cm}$$



Seitenlänge: a

$$A_{\text{farbig}} = A_{\text{Quadrat}} - 2 \cdot \frac{1}{4}A_{\text{Kreis}} = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (r_{\text{Kreis}})^2 = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4}a^2 = a^2 - \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot a^2$$

$$U_{\text{farbig}} = 4 \cdot \frac{1}{2}a + 2 \cdot \frac{1}{4}U_{\text{Kreis}} = 2a + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{Kreis}} = 2a + \pi \cdot r_{\text{Kreis}} = 2a + \pi \cdot \frac{1}{2}a$$



Beobachtung für die Flächenberechnung: Je zwei nebeneinander liegende Stücke (z.B. A_1 und A_2) ergeben zusammen ein Viertel des großen Kreises.

$$A_{\text{farbig}} = \frac{1}{2}A_{\text{Kreis}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (r_{\text{Kreis}})^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (4\text{cm})^2 = 25,1 \text{ cm}^2$$

$$U_{\text{farbig}} = 2 \cdot \frac{1}{4}U_{\text{groß}} + 4 \cdot \frac{1}{2}U_{\text{klein}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{groß}} + 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{klein}} = \pi \cdot 4\text{cm} + 4 \cdot \pi \cdot 2\text{cm} = 37,7 \text{ cm}$$