

Termumformungen

- Umformungen in Produkten
- Zusammenfassen gleichartiger Terme
- Klammerregeln
- Faktorisieren

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Terme

Potenzgesetze

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0) \quad a^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad a^p : a^q = a^{p-q}$$

$$a^p \cdot b^p = (ab)^p \quad a^p : b^p = (a:b)^p \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

Bruchterme

- Definitionsmenge
- Erweitern und Kürzen
- Addition/Subtraktion/ Multiplikation/Division

Trigonometrische Funktionen

$f: x \rightarrow \sin x \quad \mathbb{D}=\mathbb{R} \quad \mathbb{W}=[-1;1]$ Periode: 2π Nst: $x_k = k\pi$, punktsymm. zu (0/0)

$f: x \rightarrow \cos x \quad \mathbb{D}=\mathbb{R} \quad \mathbb{W}=[-1;1]$ Periode: 2π Nst: $x_k = \frac{2k+1}{2}\pi$, achsensymm. zur y-Achse

Allg. Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin(bx+c) + d$ $a \neq 0; b > 0 \rightarrow$ s. Einfluss von Parametern

Gebrochen-rationale Funktionen

$$f: x \rightarrow \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad \mathbb{D}=\mathbb{R} \setminus \{\text{Definitionslücken}\}$$

- Definitionslücken: Nenner = 0 \rightarrow senkrechte Asymptoten
- Nullstellen der Funktion: Zähler = 0
- waagrechte Asymptoten \rightarrow Zähler/Nenner-Vergleich

Exponentialfunktionen

$$f: x \rightarrow ba^x \quad a > 0, a \neq 1, b \neq 0 \quad \mathbb{D}=\mathbb{R}$$

a = Wachstumsfaktor b = Anfangswert

$a > 1$: G_f steigt (für $b > 0$) $b > 0$: $f(x) > 0$ für alle x

$0 < a < 1$: G_f fällt (für $b > 0$) $b < 0$: $f(x) < 0$ für alle x

x -Achse ist Asymptote

Der Graph von $x \rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x$ entsteht aus dem Graphen von $x \rightarrow a^x$ durch Spiegelung an der y-Achse

Gleichungssysteme

1) lineares Gleichungssystem = 2 lineare Gleichungen mit 2 gleichen Variablen

Lösungsmöglichkeiten:

- Graphische Lösung
- Rechnerische Lösung
 - Einsetzungsverfahren
 - Gleichsetzungsverfahren
 - Additionsverfahren

2) Gleichungssystem mit 3 Variablen \rightarrow zurückführen auf Gleichungssystem mit 2 Variablen

Bruchgleichungen

- mit Hauptnenner multiplizieren
- entstandene (bruchfreie) Gleichung lösen
- Lösung mit \mathbb{D} abgleichen

Lineare Gleichungen $ax+b=0$

- Sortieren zu $ax=-b$, "alle x-Glieder auf eine Seite"
- x isolieren $x = -\frac{b}{a}$

Quadratische Gleichungen $ax^2+bx+c=0 \quad a \neq 0$

Reinquadratische Gleichungen: $ax^2+c=0$

- x isolieren: $x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow$ dann Wurzel ziehen: $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$
- \rightarrow Anzahl der Lösungen beachten!!

Quadratische Gleichung ohne Konstante: $ax^2+bx=0$

- Faktorisieren durch Ausklammern von x: $x(ax+b)=0$
- Betrachte nun die einzelnen Faktoren: Ein Produkt hat den Wert Null, wenn einer der Faktoren Null ist.
- $x=0$ lineare Gleichung $ax+b=0$

Allgemeine Form: $ax^2+bx+c=0 \quad a, b, c \neq 0$

- Lösungsformel: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $D=b^2-4ac$
- $D > 0 \rightarrow$ zwei Lösungen
- $D = 0 \rightarrow$ eine Lösung
- $D < 0 \rightarrow$ keine Lösung

Algebraische Gleichungen höherer Ordnung (>2)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

\rightarrow Versuchen auf Gleichung vom Grad 1 oder 2 zurückzuführen (Faktorisieren/Substitution)

$$a(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\dots(x-x_k)^{m_k} = 0$$

In der faktorisierten Form können die Lösungen abgelesen werden, denn ein Produkt nimmt genau dann den Wert Null an, wenn einer der Faktoren Null ist.

Potenzgleichungen $x^n = a \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

	n gerade	n ungerade
$a > 0$	$x_{1/2} = \pm \sqrt[n]{a}$	$x = \sqrt[n]{a}$
$a = 0$	$x = 0$	$x = 0$
$a < 0$	keine reelle Lösung	$x = -\sqrt[n]{ a }$

Exponentialgleichung (die Variable x steht im Exponenten)

- Exponentenvergleich bei gleicher Basis $a^x = a^y \rightarrow x=y$
- Beidseitiges Logarithmieren und Anwendung der Logarithmusgesetze \rightarrow Lineare Gleichung
- Vereinfachen der Gleichung + Anwendung der Potenzgesetze bis $a^x = b \rightarrow$ Definition des Logarithmus

$$a^x = b \quad a > 0, a \neq 1, b > 0 \quad \log_a(uv) = \log_a u + \log_a v \quad u, v > 0$$

$$x = \log_a b \quad \log_a(u:v) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a u^n = n \cdot \log_a u$$

Gleichungen

- Schritt: Terme auf beiden Seiten vereinfachen und zusammenfassen.
- Schritt: Entscheiden, welcher Gleichungstyp vorliegt.

Funktionen

Lineare Funktionen

$$g: x \rightarrow mx+t \quad \mathbb{D}=\mathbb{R} \quad \mathbb{W}=\mathbb{R}$$

m : Steigung der Gerade $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- $m < 0$ Gerade G_g fällt
- $m > 0$ Gerade G_g steigt
- $m = 0$ waagrechte Gerade
- t : y-Achsenabschnitt

Quadratische Funktionen

$$p: x \rightarrow ax^2+bx+c \quad \text{allgemeine Form} \quad \mathbb{D}=\mathbb{R}$$

$p: x \rightarrow a(x-x_1)(x-x_2)$ Nullstellenform $NS_1(x_1/0) \quad NS_2(x_2/0)$

$p: x \rightarrow a(x-x_s)^2 + y_s$ Scheitelpunktform Scheitel $S(x_s/y_s)$

Ganzrationale Funktionen

$$f: x \rightarrow (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \quad a_n \neq 0 \quad \mathbb{D}=\mathbb{R}$$

bestimmt charakteristischen Verlauf: $n =$ Grad der Funktion

Symmetrie: alle Exponenten gerade \rightarrow gerade Funktion \rightarrow Achsensymmetrie

alle Exponenten ungerade \rightarrow ungerade Funktion \rightarrow Punktsymmetrie

Faktorisierte Form: $f: x \rightarrow a(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\dots(x-x_k)^{m_k}$

geeignet zur Bestimmung der Nullstellen und Verhalten an den Nullstellen

Eigenschaften von Funktionen und Graphen

Symmetrie:

$f(-x) = f(x) \leftrightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

$f(-x) = -f(x) \leftrightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Verhalten im Unendlichen:

Kommen die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion f für beliebig groß werdende x -Werte einer Zahl a beliebig nahe $\rightarrow a$ ist der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$

Einfluss von Parametern:

$g(x) = f(x) + d$ Verschiebung in y-Richtung um d

$g(x) = f(x+c)$ Verschiebung in x-Richtung um $-c$

$g(x) = af(x)$ Streckung in y-Richtung um Faktor $|a|$

$g(x) = f(bx)$ Streckung in x-Richtung um Faktor $1/|b|$

$b < 0$ zusätzliche Spiegelung an y-Achse

Laplace-Experiment: Zufallsexperiment (ZE), bei dem jedes Ergebnis gleichwahrscheinlich ist.

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

OfT hilfreich: Gegenereignis berechnen: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Stochastik

Ein ZE heißt **mehrstufig**, wenn es aus mehreren ZE zusammengesetzt ist.

- Pfadregel:** Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis erhält man durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.
- Pfadregel:** Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis erhält man durch die Addition der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören. $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P_A(B)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses B unter der Bedingung, dass ein Ereignis A dieses Zufallsexperiments bereits eingetreten ist.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad P(A) \neq 0$$

Baumdiagramm

Vierfeldertafel

	A	\bar{A}	P(B)
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	100%

Ebene Figuren

- Dreieck (gleichschenkelig, gleichseitig, rechtwinklig)
- Viereck (Quadrat, Rechteck, Raute, Drachenviereck, Trapez, Parallelogramm)
- Kreis, Kreissektor

Flächeninhalt

Strahlensatz

- Strahlensatz:** $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ und $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$
- Strahlensatz:** $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Körper

Oberflächeninhalt Volumen

- Prisma, Zylinder
- Spitzkörper: Pyramide, Kegel
- Kugel

$V = G \cdot h$ $O = 2G + M$ $M_{\text{Zylinder}} = 2\pi r h$ $V = \frac{1}{3} G h$ $O = G + M$ $M_{\text{Kegel}} = \pi r s$ $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $O = 4\pi r^2$

Satz des Pythagoras/Trigonometrie

Voraussetzung: rechtwinkliges Dreieck

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$