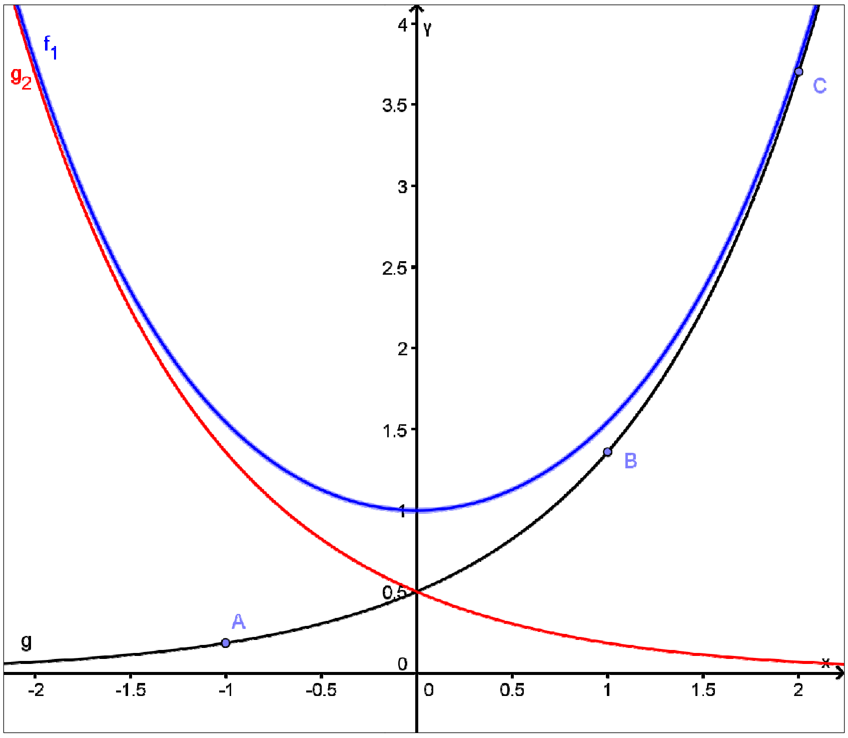
1a)

$g(-1) \sim 0{,}18$ $g(1) \sim 1{,}36$ $g(2) \sim 3{,}69$



$$g(x) = \frac{e^x}{2}$$

$g^*(x) = \frac{e^{-x}}{2} = g(-x)$ → Spiegelung an der y-Achse

$g(x) + g^*(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f_1(x)$

→ Der Graph von f_1 entsteht durch Addition von g und g^*.

b)

$f_k(-x) = \frac{e^{-kx}+e^{kx}}{2} = f_k(x)$ → Achsensymmetrie zur y-Achse

Oder:

Der Graph von f_1 entsteht durch Addition der Graphen g und g^*, die an der y-Achse gespiegelt sind (vgl. 1a)). Somit muss der Graph von f_1 und damit alle Graphen g_k achsensymmetrisch zur y-Achse sein.

$f_k'(x) = \frac{1}{2k}(ke^{kx} - ke^{-kx}) = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}$

$f_k'(x) = 0$

$e^{kx} - e^{-kx}$=0

$e^{kx} = e^{-kx}$

$kx = -kx$

$2kx = 0 \qquad k \in \mathbb{R}^+$

$x = 0$ → waagrechte Tangente bei x=0

Monotonieverhalten:

x<0 : $\frac{1}{2} > 0$ und $e^{kx} - e^{-kx} < 0$ → $f_k'(x) < 0$ → f_k streng monoton fallend

x>0 : $\frac{1}{2} > 0$ und $e^{kx} - e^{-kx} > 0$ → $f_k'(x) > 0$ → f_k streng monoton steigend

- ➔ Vorzeichenwechsel von f'(x) bei x=0 von – zu +
- ➔ $Min\ (0/\frac{1}{k})$

c)

$$\int_0^x f_k(t)dt$$

<u>Symmetrieverhalten:</u>

Da f_k achsensymmetrisch zur y-Achse ist und die untere Grenze von F_k bei x=0 liegt, muss F_k punktsymmetrisch zum Ursprung sein, da die Flächen für x und –x betragsmäßig gleich groß sind.

<u>Monotonieverhalten:</u>

Es gilt: $F_k'(x) = f_k(x)$

$f_k(x) = \frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2k} > 0$ für alle $x \in D$

➔ F_k streng monoton steigend

<u>Krümmungsverhalten:</u>

Es gilt: $F_k''(x) = f_k'(x)$

Aus Aufgabe 1b) folgt: F_k ist für x<0 rechtsgekrümmt, für x>0 linksgekrümmt und besitzt einen Wendepunkt bei x=0

d)

$$\int_0^x f_1(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x e^t + e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}[e^t - e^{-t}]_0^x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - 0$$
$$= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

<u>Jetzt:</u>

$$[f_1(x)]^2 = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

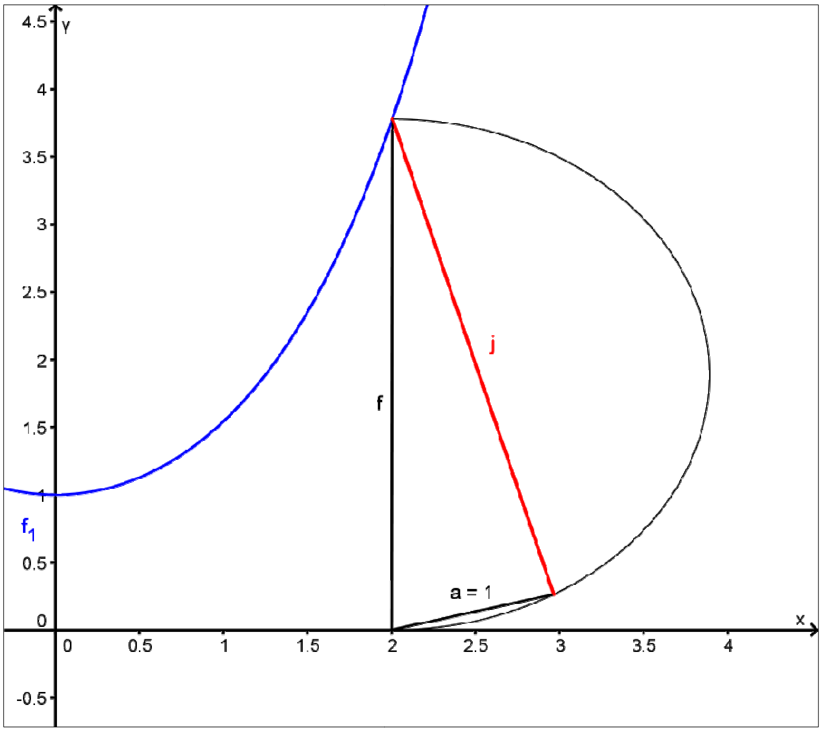
$$1 + [F_1(x)]^2 = 1 + (\frac{e^x - e^{-x}}{2})^2 = 1 + \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{4 + e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$
$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

$$\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$
$$[f_1(x)]^2 = 1 + [F_1(x)]^2$$

$J = \int_0^2 f_1(x)dx = F_1(2) - F_1(0) = F_1(2)$ ($F_1(0) = 0$, da die obere Grenze gleich der unteren Grenze ist (vgl. 1c))

$$[f_1(x)]^2 = 1 + [F_1(x)]^2$$
$$[f_1(2)]^2 = 1 + [F_1(2)]^2$$
$c^2 = a^2 + b^2$ (Satz des Pythagoras)

Die Strecke $F_1(2)$ entspricht also einer Kathete im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $f_1(2)$ und einer zweiten Kathete mit der Länge 1. Ein Begrenzungspunkt für die Strecke j stellt also der Punkt $(2/f_1\ (2))$ dar, der zweite Punkt kann mittels Thaleskreis konstruiert werden, da die Schnittwinkel aller rechten Winkel auf einem Kreis mit $d = f_1(2)$ liegen.



2.a)

Tipp: $\boxed{f_1(x) = m;}$

$$f_1(x) = m;$$

$$\frac{e^x \ + e^{-x}}{2} = m;$$

$$e^x \ + e^{-x} = 2m; | \cdot e^x$$

$$e^{2x} + 1 = 2me^x;$$

$$e^{2x} - 2me^x + 1 = 0;$$

1. Möglichkeit (Mitternachtsformel)	2. Möglichkeit (Substitution +Mitternachtsformel)
$e^x = \frac{2m \pm \sqrt{4m^2-4}}{2};$ $e^x = \frac{2m \pm 2\sqrt{m^2-1}}{2};$ $e^x = m \pm \sqrt{m^2-1}; \mid ln$ $x_{1,2} = \ln[m \pm \sqrt{m^2-1}]$	$e^x = u$ $u^2 - 2mu + 1 = 0;$ $u_{1,2} = \frac{2m \pm \sqrt{4m^2-4}}{2};$ $u_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2-1};$ $e^x = u; \rightarrow x = \ln u$ $x_{1,2} = \ln[m \pm \sqrt{m^2-1}]$

Bedingung (Angabe):

$m > 1$:

$m^2 - 1 \geq 0 \rightarrow -1 \geq m \geq 1$; negative Werte entfallen, da $f(x) > 0$

$f$ür $m = 1$: $x_{1,2} = \ln 0$ ↯

$\rightarrow m > 1$

2 b)

Tipp:

- Flächenstück rotiert um die y-Achse → Radius r = x_0 (Aufgabe 2a)
- Rotationsvolumen: Rotation um die y-Achse (→Umkehrfunktion)

$d = 2 \cdot r = 2 \cdot x_0$

Siehe 2a): $x_{1,2}$ sind die Stellen, an denen die Funktion f_1 den Wert m (m > 1) annimmt

$f_1(x_0) = 10; \qquad (10 > 1)$

$x_0 = \ln[10 + \sqrt{10^2 - 1}];$

$d = 2 \cdot \ln[10 + \sqrt{99}] \approx 5{,}99$

Rotationsvolumen: $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$

$f_1(r) = m; mit\ m \in [1; 10];$

- siehe Graph: y-Werte größer 1
- siehe Angabe: Flächenstück begrenzt durch die Gerade y = 10

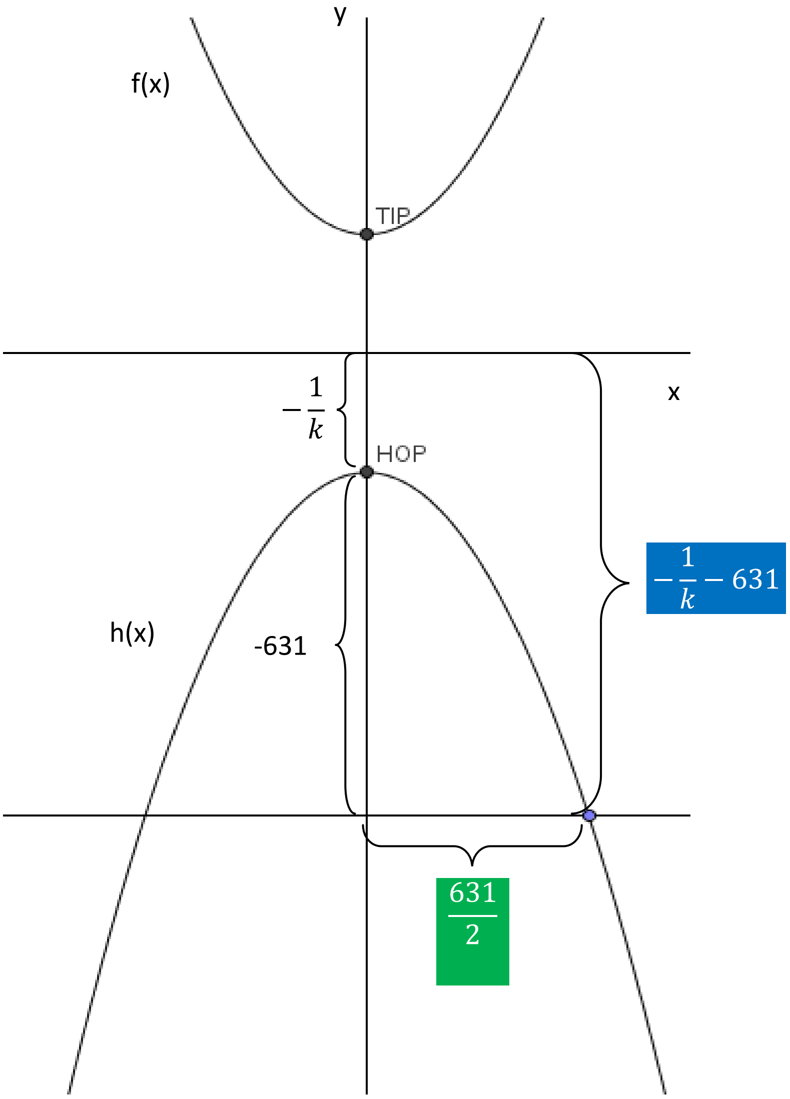
→ $r = \ln[m + \sqrt{m^2 - 1}]$ (Umkehrfunktion von $f_1(x)$; nur positiv, da nur die Funktion im 1. Quadranten um die y-Achse rotiert)

- ➔ Kelchvolumen: $V = \pi \cdot \int_1^{10} (\ln[m + \sqrt{m^2 - 1}])^2 dm$

3.

$h_k(x)$ sei die an der x-Achse gespiegelte Funktion $f_k(x)$.

Skizze:



$$h_k(x) = -f_k(x) = -\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}; \text{ mit Hochpunkt } \left(0\middle|-\frac{1}{k}\right); \left[\text{siehe 1b: TIP } \left(0\middle|\frac{1}{k}\right)\right]$$

Jetzt: siehe Skizze

$$h_k\left(\frac{631}{2}\right) = -631 - \frac{1}{k}; \text{mit } k = 2^{-7}$$

$$-631 - \frac{1}{2^{-7}} = -759$$

Außerdem:

$$h_{2^{-7}}\left(\frac{631}{2}\right) = -\frac{e^{2^{-7}\cdot\frac{631}{2}} + e^{-2^{-7}\cdot\frac{631}{2}}}{2\cdot 2^{-7}} \approx -758{,}15 \approx -759$$

→ $k = 2^{-7}$ ist eine gute Näherungslösung