Lösung: ABI 2006 II

a) Verhalten gegen $+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{k}{1+e^{-kx}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{k}{1+\underbrace{e^{-kx}}_{\to 0 \text{ da } k>0}} = \frac{k}{1} = k$$

Verhalten gegen $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{1+\underbrace{e^{-kx}}_{\to\infty \text{ da } k>0}} = \frac{k}{0^+} = 0^+$$

---

b) $f_k(x) = \dfrac{k}{1+e^{-kx}} = k\left(1+e^{-kx}\right)^{(-1)}$

$$f_k'(x) = k\left(1+e^{-kx}\right)^{(-2)}(-1)\,e^{-kx}\,(-k) = k^2 e^{-kx}\left(1+e^{-kx}\right)^{(-2)} =$$

$$= \frac{\overbrace{k^2}^{>0}\,\overbrace{e^{-kx}}^{>0}}{\underbrace{\left(1+e^{-kx}\right)^2}_{>0}} > 0$$

Die Funktion ist streng monoton, da ihre 1. Ableitung immer größer als Null ist. Anhand der Grenzwerte (siehe 1a) lässt sich erkennen, dass die Funktion streng monoton steigend ist.

$W_{fk} =]0; k[$ (siehe 1a)

c) $$f_k''(x) = \frac{-k \cdot k^2 e^{-kx}\left(1+e^{-kx}\right)^2 - 2\left(1+e^{-kx}\right)e^{-kx} - k \cdot k^2 \cdot e^{-kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^4} =$$

$$= \frac{-k^3 e^{-kx}\left(1+e^{-kx}\right) + 2k^3 e^{-kx} e^{-kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^3} =$$

$$= k^3 e^{-kx} \; \frac{2e^{-kx} - \left(1+e^{-kx}\right)}{\left(1+e^{kx}\right)^3} =$$

$$= k^3 e^{-kx} \; \frac{e^{-kx} - 1}{\left(1+e^{kx}\right)^3}$$

$$f_k''(x) = 0 \Rightarrow \quad k^3 e^{-kx}\left(e^{-kx} - 1\right) = 0$$

$$e^{-kx} = 1$$

$$-kx = \ln 1 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$

Nachweis eines Wendepunktes:

		0
k^3	+	+
e^{-kx}	+	+
$(e^{-kx} - 1)$	+	−
$(e^{-kx} + 1)^3$	+	+
$f_k''(x)$	+	−

Bei $x = 0$ erfolgt ein VZW der 2. Ableitung

$\Rightarrow$ WP bei $x = 0$

$$f_k(0) = \frac{k}{1+e^{-k \cdot 0}} = \underline{\underline{\frac{k}{2}}}$$

$\Rightarrow$ WP $\left(0 \,\middle|\, \frac{k}{2}\right)$

d) $f_4(-x) + f_4(x) = \frac{4}{1+e^{-4(-x)}} + \frac{4}{1+e^{-4x}} =$

$$= \frac{4(1+e^{-4x}) + 4(1+e^{4x})}{(1+e^{4x})(1+e^{-4x})} =$$

$$= \frac{4(2+e^{-4x}+e^{4x})}{(2+e^{-4x}+e^{4x})} = \underline{\underline{4}}$$

Symmetrie zum Punkt WP:

$f_4(0-x) + f_4(0+x) = 2\frac{4}{2}$ (Forderung der Punktsymmetrie)

$\underline{\underline{f_4(-x) + f_4(x) = 4}}$

e) $\int_{-\infty}^{0} f_4(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{4}{1+e^{-4x}}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{4e^{4x}}{(1+e^{-4x})e^{4x}} =$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{4e^{4x}}{e^{4x}+e^{0}} = \int_{-\infty}^{0} \frac{4e^{4x}}{e^{4x}+1} = \left[\ln(e^{4x}+1)\right]_{-\infty}^{0}$$

Berechnung des Flächeninhalts:

$A = \left[\ln(e^{4x}+1)\right]_{-\infty}^{0} = \ln(e^{4\cdot 0}+1) - \lim_{x\to-\infty} \ln(e^{4x}+1) =$

$$= \ln 2 - \lim_{x\to-\infty} \ln(e^{4x}+1) = \underline{\underline{\ln 2}}$$

2) $N(x) = 10^6 \cdot \dfrac{2}{1+e^{-2(x-6{,}908)}}$; $x \geq 0$

a) $f_2(x) = \dfrac{2}{1+e^{-2x}}$

x wurde um 6,908 in positive x-Richtung verschoben, woraus folgt, dass $x - 6{,}908$ im Exponent steht

y wurde um den Faktor 10^6 gedehnt.

b) $N(0) = 10^6 \dfrac{2}{1+e^{-2(-6{,}908)}} \approx \underline{\underline{2}}$ (zu Beginn)

$N(2) = 10^6 \dfrac{2}{1+e^{-2(2-6{,}908)}} \approx \underline{\underline{109}}$ (nach 2h)

c) $10^6 \cdot \dfrac{2}{1+e^{-2(x-6{,}908)}} = 0{,}9 \cdot 2 \cdot 10^6$

$$\frac{2}{1+e^{-2(x-6{,}908)}} = 1{,}8$$

$$2 = 1{,}8\left(1+e^{-2(x-6{,}908)}\right)$$

$$2 = 1{,}8 + 1{,}8e^{-2(x-6{,}908)}$$

$$0{,}2 = 1{,}8\, e^{-2(x-6{,}908)}$$

$$\frac{1}{9} = e^{-2(x-6{,}908)}$$

$$\ln\frac{1}{9} = -2x + 13{,}816$$

$$x = \underline{\underline{8{,}006}} \approx \underline{\underline{8}}$$

d) Lösungsweg 1: Man betrachtet den Zeitraum einer halben Minute vor und nach dem Wendepunkt. Wie viele Bakterien sind hinzugekommen?

$$N\left(6{,}908 + \frac{1}{120}\right) - N\left(6{,}908 - \frac{1}{120}\right) =$$

$$= 10^6 \frac{2}{1+e^{-2\frac{1}{120}}} - 10^6 \frac{2}{1-e^{2\frac{1}{120}}} \approx \underline{\underline{16.666}}$$

Lösungsweg 2: Man betrachtet direkt die Minute des größten Anstiegs.

$$N(x) = 10^6 \, f_2(x - 6{,}908) \Rightarrow \cancel{N'(x) = 10^6 f_2'(0)}$$

$$\Rightarrow N'(6{,}908) = 10^6 \cdot f_2'(0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{60} N'(6{,}908) = \frac{1}{60} \cdot 10^6 \frac{4e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{60} 10^6 \approx \underline{\underline{16.667}}$$

$\Rightarrow$ Der stärkste Zuwachs beträgt 16.667 Bakterien in der Minute