Stochastik

1. Die Axiome von Kolmogorow

   Ω Ergebnismenge
   Teilmenge = Ereignisse
   P Funktion bzw. Wahrscheinlichkeit

   I. $P(A) \geq 0$
   II. $P(\Omega) = 1$
   III. Wenn AnB={};
   dann P(AuB)=P(A)+P(B)

   Die Schnittmengen der Teilergebnisse müssen immer 1 ergeben
   P(AnB)+P(AnC)+P(BnC)=1, da $P(\Omega) = 1$

2. Zusammengesetze Ereignisse
   Wenn A und B keine (gleichzeitige) Schnittmenge besitzen, dann heißen sie disjunkt oder unvereinbar: AnB={}

3. Der Additionssatz

   P(AuB)=P(A)+P(B)-P(AnB)

4. Unabhängigkeit von Ereignissen

A und B heißen unabhängig, wenn gilt: P(A)*P(B)=P(AnB) ansonsten sind sie abhängig.

5. Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsfunktion
   Eine Funktion X, die jedem Ergebnis ω eines Ergebnisraumes Ω eine reelle Zahl x_i zuordnet, heißt Zufallsgröße X. x_i sind also Werte, die die Zufallsgröße erreichen kann.
   Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $P(X=x_i)$ ist 1.

   Die Funktion $x_i \mapsto P(X=x_i)$, die jedem x_i eine Wahrscheinlichkeit zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion/-verteilung der Zufallsgröße X.

6. Der Erwartungswert eine Zufallsgröße FS S.67
   X sei eine Zufallsgröße mit der Wertemenge $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(X=x_i)$, dann heißt der zu erwartende Mittelwert μ „Erwartungswert E(x)" der Zufallsgröße X.
   Voraussetzung: hinreichende Wiederholungen

   Ein Spiel mit einem Einsatz, bei dem man dem Erwartungswert nach weder verliert noch gewinnt, nennt man gerecht oder fair. Es gilt: E(x) = 0

7. <u>Varianz und Standardabweichung</u> FS S.67

Zwei verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilung können sich trotz gleichem Erwartungswertes stark unterscheiden.

Sei X eine Zufallsgröße mit $E(x)= \mu$ und der Wertemenge $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$, dann entspricht Var(X) der Varianz der Zufallsgröße X und $\sigma(X) = \sqrt{\quad}(\ )$ der Standardabweichung oder Streuung von X.

8. <u>Ziehen aus einer Urne</u>

Mit Zurücklegen und Beachtung der Reihenfolge

Wird aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln k-mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen und mit Beachtung der Reihenfolge, so gilt für die Anzahl der möglichen Ergebnisse: $\boxed{\Omega = n^k}$

Ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

Wird aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln k-mal eine Kugel ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge gezogen, so gilt:

$$\boxed{\Omega = \frac{!}{(\quad)!} = n*(n-1)*...*(n-k+1)}$$

Ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

Wird aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln k-mal eine Kugel ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge bzw. werden k Kugeln auf einmal gezogen, so gilt:

$$\boxed{\Omega = \frac{!}{*(\quad)!} = (\quad)}$$

Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit:

Beispiel: N Kugeln insgesamt und n gezogene
S schwarze Kugeln und s gezogene
W weiße Kugeln = N-S

$$\boxed{P(X=s) = \frac{*}{\quad}}$$

9. <u>Binomialverteilung</u>

Bernoullikette

Ein Zufallsexperiment heißt Bernoulli-Experiment, wenn es nur zwei Ergebnisse hat:

z.B. P(Treffer) = p
P(Nicht-Treffer) = q = 1-p

Damit es eine Bernoulli-Kette der Länge n ist, muss das Zufallsexperiment aus n unabhängigen Durchführungen bestehen.

Dabei darf sich die Wahrscheinlichkeit p nicht verändern!

Formel von Bernoulli:

Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p, wobei X die Anzahl der Treffer ist. Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer:

$$\boxed{P_p^n(X=k) = (\quad) * p^k * (1-p)^{n-k}}$$

Binomialverteilung

Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p. X sei die Anzahl der Treffer, welche die Werte $k \in \{0,1,\ldots, n\}$ annehmen kann.
Die Zufallsgröße X mit $P(X=k) = B(n;p;k)$ heißt binomial verteilt nach der Binomialverteilung.

Die Funktion der Binomialverteilung B(n;p) mit den Paramtern n und p lautet:

$$\boxed{B(n;p):k \longmapsto B(n;p;k) = (\quad) * p^k * q^{n-k}}$$

Symmetriegesetz für Binomialverteilung: $B(n;p;k) = B(n;q;n-k)$

Für die kumulative Verteilungsfunktion einer nach B(n:p) verteilten Zufallsgröße gilt:

$$\boxed{F_p^n:k \longmapsto P_p^n(X\leq k) = \sum \qquad (\ :\ :\ )}$$

Tipps zur Tabellenarbeit

- $P(X>k) = 1- P(X\leq k)$ (Gegenereignis)
- $P(X<k) = P(X\leq k-1)$
- $P(X=k) = P(X\leq k) - P(X\leq k-1)$
- $P(k_1\leq X\leq k_2) = P(X\leq k_2) - P(X\leq k_1-1)$

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer binomial verteilen Zufallsgröße S.67

10. Hypothesen und Fehler 1.Art sowie Fehler 2.Art

Getestet wird, ob die Nullhypothese H_0 verworfen wird.

K: Ablehnungsbereich; kritischer Bereich
K: Zustimmungsbereich
H_1: Gegenhypothese

Fehler 1. Art: H_0 wird abgelehnt, obwohl es richtig ist. α‘; $P(Z\in K)$
Fehler 2. Art: H_0 wird nicht verworfen, obwohl H_1 wahr ist. β‘; $P(Z\in K)$

Eine Verringerung beider Fehler ist nur möglich durch die Erhöhung des Stichprobenumfangs.

Signifikanzniveau α: Obergrenze für den Fehler 1.Art
kritischer Bereich Entscheidungsregel

11. Einseitiger Signifikanztest

1) Festlegung der Testgröße Z und des Stichprobenumfangs n.
2) Mathematische Formulierung der Null- und Gegenhypothese
3) Festlegung des Signifikanzniveaus α
4) Aufstellen der Entscheidungsregel durch Konstruktion des kritischen Bereichs K

LINKS
H_0: $p=p_0$ ($p\geq p_0$)
H_1: $p< p_0$
$K = \{0;1;\ldots;g\}$, wobei g ≙ größte ganze Zahl
mit $\alpha' = P_{p(0)}^{\,n}(Z\leq g) \leq \alpha$

RECHTS
H_0: $p=p_0$ ($p\leq p_0$)
H_1: $p> p_0$
$K = \{g; g+1;\ldots;n\}$, wobei g ≙ die kleinste Zahl
mit $\alpha' = P_{p(0)}^{\,n}(Z\geq g) \leq \alpha$

Umformung Rechtsseitiger Test

$\alpha' = P_{p(0)}^{n}\,(Z \geq g) \leq \alpha$

$1 - P_{p(0)}^{n}\,(Z \leq g-1) \leq \alpha$

$P_{p(0)}^{n}\,(Z \leq g-1) \geq 1 - \alpha$

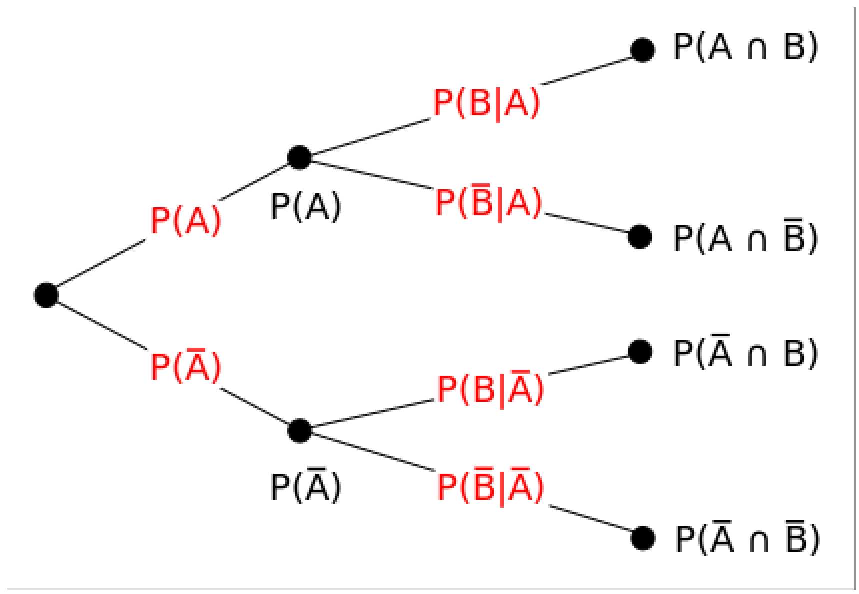
g-1= „Wert aus der Tabelle“

Grundwissen

Vierfeldertafel

		—	
A	P(AnB)	P(An$\overline{B}$)	P(A)
$\overline{!}$	P($\overline{A}$nB)	P($\overline{A}$)	P($\overline{A}$)
	P(B)	P($\overline{B}$)	1

Baumdiagramm



Pfadregeln

1. Pfadregel (Produktregel)
   Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm.

2. Pfadregel (Additionsregel)
   Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade.