

Regiomontanus - Gymnasium Haßfurt - Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 9

Wissen und Können	Aufgaben, Beispiele, Erläuterungen
1. Zahlenmengen	
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ natürliche Zahlen \subset ganze Zahlen \subset rationale Zahlen \subset reelle Zahlen	$-1 \notin \mathbb{N}; \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}; \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}; \sqrt{2} \in \mathbb{R}$
2. Wurzeln	
\sqrt{a} (Quadratwurzel) ist diejenige nicht-negative reelle Zahl, deren Quadrat a ergibt. a heißt Radikant der Wurzel, er darf nicht negativ sein! Es gilt: $\sqrt{a^2} = a $	$\sqrt{25} = 5; \sqrt{0} = 0; \sqrt{(-4)^2} = 4$ $\sqrt{x-2}$ ist nur für $x \geq 2$ definiert $\sqrt{(x-1)^2} = x-1 $
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad (a, b \geq 0)$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0; b > 0)$	$\sqrt{12,5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{25} = 5$ $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6,25} = 2,5$
Die n-te Wurzel ($n \in \mathbb{N}$) aus einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt.	$\sqrt[3]{8} = 2; \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = 0,1$
Schreibweise: $\sqrt[n]{a}$ oder $a^{\frac{1}{n}}$ und damit für $a > 0$: $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$	$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3; 9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ $\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$
3. Binomische Formeln	
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$\frac{1}{3}x^2 + 4x + 12 = \frac{1}{3}(x^2 + 12x + 36)$ $= \frac{1}{3}(x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2)$ $= \frac{1}{3}(x + 6)^2$ $\left(\frac{1}{4}x - 0,8y\right)^2 = \left(\frac{1}{4}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}x \cdot 0,8y + (0,8y)^2$ $= \frac{1}{16}x^2 - 0,4xy + 0,64y^2$ $\left(\frac{1}{2}a + \sqrt{7}b\right)\left(\frac{1}{2}a - \sqrt{7}b\right) = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - (\sqrt{7}b)^2$ $= \frac{1}{4}a^2 - 7b^2$

4. Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ heißt **quadratische Gleichung**.

Sonderfälle:

(1) Gleichungen vom Typ $ax^2 + c = 0$
 (Reinquadratische Gleichung)
 Lösungen ermitteln über $x^2 = -\frac{c}{a}$

(2) Gleichungen vom Typ $ax^2 + bx = 0$
 Lösungen ermitteln durch Ausklammern von $a x$

Zu (1): a) $4x^2 - 20 = 0;$
 $x^2 = 5;$
 $|x| = \sqrt{5};$
 $x_1 = -\sqrt{5}, x_2 = \sqrt{5}$

b) $\frac{1}{3}x^2 + 3 = 0;$
 $x^2 = -9$

Diese Gleichung hat in \mathbb{R} keine Lösung, da Quadrate reeller Zahlen nie negativ sind.

Zu (2): $4x^2 - 20x = 0;$ *Faktorisieren: $a x$ ausklammern*
 $4x(x - 5) = 0;$
 $x_1 = 0, x_2 = 5$ *Ein Produkt nimmt genau dann den Wert Null an, wenn einer der Faktoren Null ist.*

Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

Um eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ auf Lösungen zu untersuchen, bestimmt man zunächst die **Diskriminante $D = b^2 - 4ac$** .

- Falls $D < 0$ hat die Gleichung **keine Lösung**.
- Falls $D = 0$ hat die Gleichung **genau eine Lösung**, nämlich $x = -\frac{b}{2a}$
- Falls $D > 0$ hat die Gleichung **zwei Lösungen**:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

1) $7x^2 - 6x + 2 = 0;$ $a = 7, b = -6, c = 2$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = -20 < 0$
 \Rightarrow Keine Lösung

2) $-2x^2 + 12x - 18 = 0;$ $a = -2, b = 12, c = -18$
 $D = 12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-18) = 0$
 \Rightarrow Genau eine Lösung: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot (-2)} = 3$

3) $6x^2 - 7x - 3 = 0;$ $a = 6, b = -7, c = -3$
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 121 > 0$
 \Rightarrow Zwei Lösungen :

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm 11}{12}$$

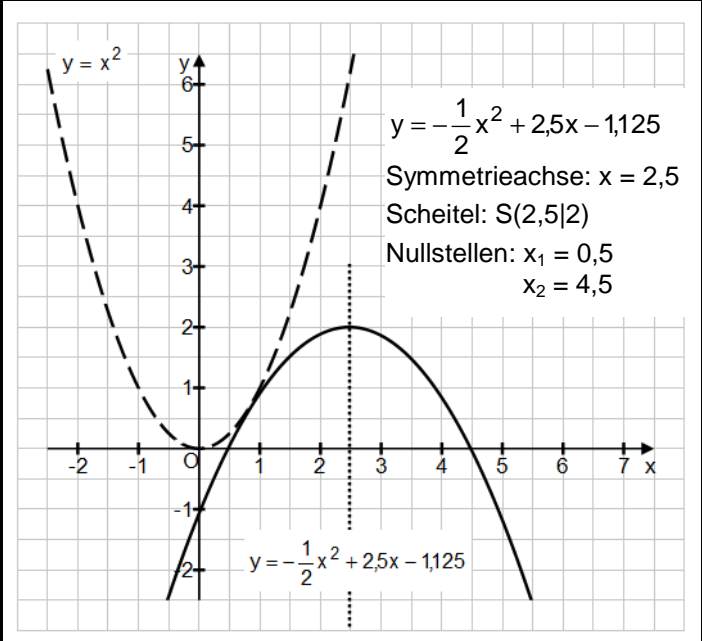
 $x_1 = \frac{3}{2}$ und $x_2 = -\frac{1}{3}$

5. Quadratische Funktion

Eine Funktion der Form $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt **quadratische Funktion**.

Den zugehörigen Funktionsgraphen nennt man **Parabel**. Parabeln haben eine **Symmetrieachse**. Ihr Schnittpunkt mit der Parabel heißt **Scheitel**.

Der Graph der Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^2$ heißt **Normalparabel**.



Die Gleichung einer quadratischen Funktion kann in der **allgemeinen Form** $y = a x^2 + b x + c$ oder in der **Scheitelform** $y = a (x - x_s)^2 + y_s$ (Scheitel: $S(x_s|y_s)$) angegeben werden.

Mittels **quadratischer Ergänzung** kann die allgemeine Form der Funktionsgleichung in die Scheitelform umgewandelt werden.

Man kann die Gleichung auch mithilfe der Nullstellen angeben:

- zwei Nullstellen x_1 und x_2 : $y = a (x - x_1)(x - x_2)$
- eine Nullstelle x_1 : $y = a (x - x_1)^2$

Allgemeine Form: $y = -\frac{1}{2} x^2 + 4x - 6$

Quadratische Ergänzung:

$y = -\frac{1}{2} [x^2 - 8x + 12]$ *a ausklammern*

$y = -\frac{1}{2} [(x^2 - 8x + 4^2) - 4^2 + 12]$ *quadrat. ergänzen*

$y = -\frac{1}{2} [(x - 4)^2 - 16 + 12]$ *binomische Formel*

$y = -\frac{1}{2} (x - 4)^2 + 2$ *vereinfachen*

Scheitelform: $y = -\frac{1}{2} (x - 4)^2 + 2$ (Scheitel: $S(4|2)$)

Verschiebung der Normalparabel

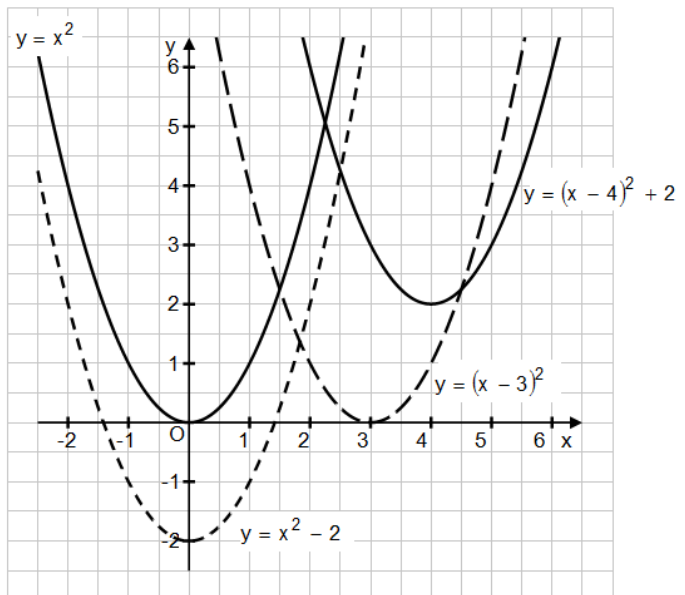
$a = 1$, d.h. $y = x^2 + bx + c = (x - x_s)^2 + y_s$

Leicht erkennbar an der Scheitelform:

- 1) $y = x^2$: keine Verschiebung
- 2) $y = x^2 + y_s$: Verschiebung um y_s in y-Richtung
- 3) $y = (x - x_s)^2$: Verschiebung um x_s in x-Richtung
- 4) $y = (x - x_s)^2 + y_s$: Verschiebung um x_s in x-Richtung und um y_s in y-Richtung

Je nach Verschiebung kann die neue Parabel keine, eine oder zwei Nullstellen haben:

- $y_s > 0$: keine Nullstelle
- $y_s = 0$: eine Nullstelle
- $y_s < 0$: zwei Nullstellen

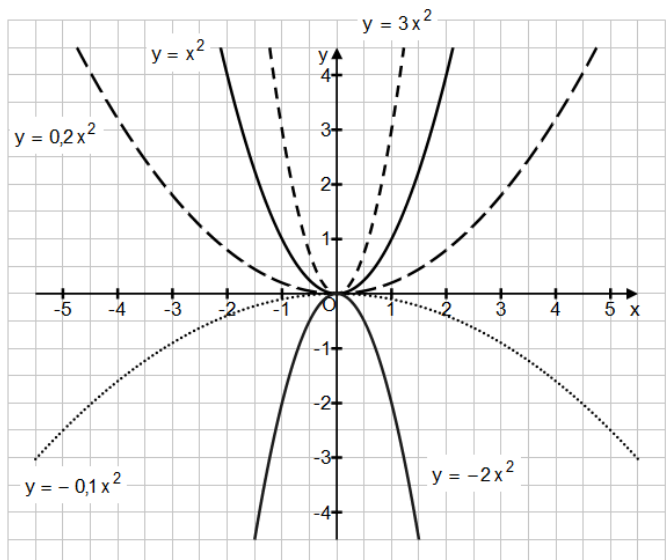


- 1) $y = x^2$ Scheitel: $S(0|0)$; Nullstelle: $x = 0$
- 2) $y = x^2 - 2$ Scheitel: $S(0|-2)$; Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$
- 3) $y = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ Scheitel: $S(3|0)$; Nullstelle: $x = 3$
- 4) $y = (x - 4)^2 + 2 = x^2 - 8x + 18$ Scheitel: $S(4|2)$; keine Nullstellen

Streckung von Normalparabeln

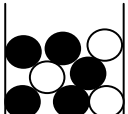
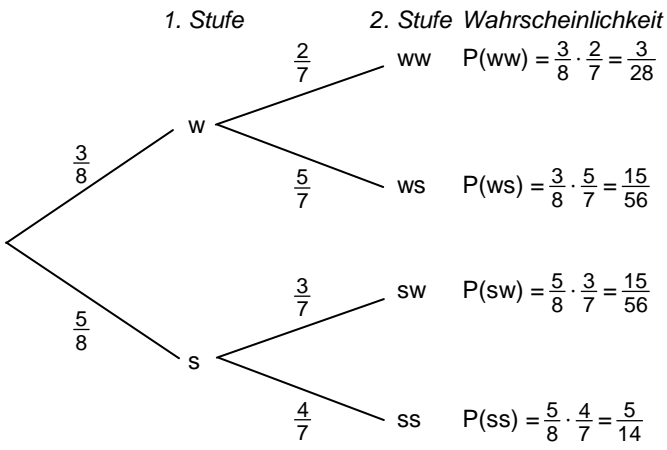
$b = c = 0$, d.h. $y = a x^2$

- $a > 0$: Die Parabel ist nach oben offen.
- $a < 0$: Die Parabel ist nach unten offen.
- $|a| > 1$: Die Parabel ist enger als die Normalparabel.
- $0 < |a| < 1$: Die Parabel ist weiter als die Normalparabel.



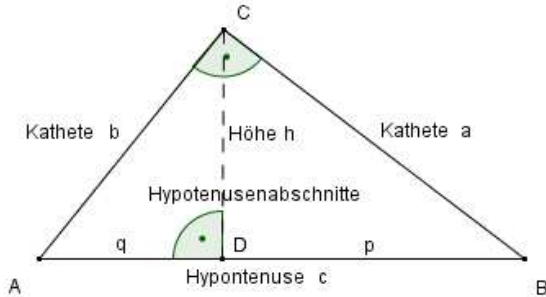
<p>Nullstellen bestimmen</p> <p>Quadratische Funktionen können entweder mit Hilfe der Scheitelform oder, ausgehend von der allgemeinen Form, mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf Nullstellen untersucht werden.</p> <p>Quadratische Funktionen können keine, eine oder zwei Nullstellen haben:</p> <ul style="list-style-type: none"> - <u>Keine Nullstelle:</u> Der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse ($y_S > 0$) und die Parabel ist nach oben offen ($a > 0$) oder der Scheitel liegt unterhalb der x-Achse ($y_S < 0$) und die Parabel ist nach unten offen ($a < 0$). oder: $D < 0$ - <u>Eine Nullstelle:</u> Der Scheitel liegt auf der x-Achse ($y_S = 0$) oder: $D = 0$ - <u>Zwei Nullstellen:</u> Der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse ($y_S > 0$) und die Parabel ist nach unten offen ($a < 0$) oder der Scheitel liegt unterhalb der x - Achse ($y_S < 0$) und die Parabel ist nach oben offen ($a > 0$). oder: $D > 0$ 	$y = -\frac{1}{2} (x - 4)^2 + 2 = -\frac{1}{2} x^2 + 4x - 6$ <p><u>Anzahl der Nullstellen:</u></p> <p>$y_S = 2$: der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse $a = -0,5$: die Parabel ist nach unten geöffnet \Rightarrow Die quadratische Funktion hat zwei Nullstellen.</p> <p><u>Lage der Nullstellen:</u></p> $-\frac{1}{2} (x - 4)^2 + 2 = 0;$ $(x - 4)^2 = 4$ $x_1 - 4 = -2 \text{ oder } x_2 - 4 = 2$ $x_1 = 2 \text{ und } x_2 = 6$ <p>oder:</p> <p><u>Anzahl der Nullstellen:</u></p> $-\frac{1}{2} x^2 + 4x - 6 = 0; \quad a = -0,5, \quad b = 4, \quad c = -6$ $D = 4^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-6) = 4 > 0$ \Rightarrow Die quadratische Funktion hat zwei Nullstellen. <p><u>Lage der Nullstellen:</u></p> $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-0,5)} = -(4 \pm 2)$ $x_1 = 2 \text{ und } x_2 = 6$
--	---

6. Mehrstufige Zufallsexperimente

<p>Ein Zufallsexperiment heißt mehrstufig, wenn es aus mehreren Zufallsexperimenten zusammengesetzt ist. Zur Veranschaulichung dienen Baumdiagramme.</p> <p>Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen bzw. Ereignissen können mit Hilfe von Pfadregeln bestimmt werden.</p> <p>1. Pfadregel: Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment berechnet man die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades multipliziert.</p> <p>2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.</p>	<p>In einer Urne befinden sich drei <u>w</u>eiße und fünf <u>s</u>chwarze Kugeln.</p> <p>Aus dieser Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.</p> <p>Ergebnisraum: $\Omega = \{ww, ws, sw, ss\}$</p>  <p>Baumdiagramm:</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="flex: 1;">  </div> <div style="flex: 1; padding-left: 20px;"> <p>Wahrscheinlichkeit</p> <p>$P(ww) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$</p> <p>$P(ws) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$</p> <p>$P(sw) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$</p> <p>$P(ss) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$</p> </div> </div> <p>Ereignis E „Kugeln haben die gleiche Farbe“: $E = \{ww, ss\}$ als Teilmenge des Ergebnisraumes Ω</p> $P(E) = P(\{ww, ss\}) = P(ww) + P(ss) = \frac{3}{28} + \frac{5}{14} = \frac{13}{28}$
--	--

7. Satz des Pythagoras

Man nennt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite **Hypotenuse**, die beiden anderen Seiten **Katheten**. Die Höhe zur Hypotenuse zerlegt diese in zwei Hypotenusenabschnitte.



Satz des Pythagoras

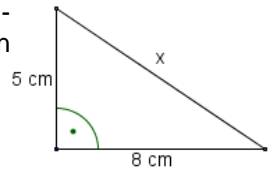
In jedem **rechtwinkligen** Dreieck haben die Quadrate über den Katheten a und b zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse c.

Es gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

Kehrsatz zum Satz des Pythagoras

Wenn in einem Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.

1: Berechne die fehlende Seitenlänge x des rechtwinkligen Dreiecks.



Lösung:

$$x^2 = (5 \text{ cm})^2 + (8 \text{ cm})^2$$

$$x = \sqrt{(5 \text{ cm})^2 + (8 \text{ cm})^2} = \sqrt{89 \text{ cm}^2} = 9,4 \text{ cm}$$

2: Berechne für ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C, a = 28 cm und c = 53 cm die fehlende Seitenlänge.

Lösung:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = (53 \text{ cm})^2 - (28 \text{ cm})^2$$

$$b = \sqrt{2025 \text{ cm}^2} = 45 \text{ cm}$$

3: Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Seiten x = 12 cm, y = 5 cm und z = 13 cm.

Lösung:

1.) Prüfe, ob das Dreieck rechtwinklig ist.

$$z^2 = (13 \text{ cm})^2 = 169 \text{ cm}^2$$

$$x^2 + y^2 = (12 \text{ cm})^2 + (5 \text{ cm})^2 = 169 \text{ cm}^2$$

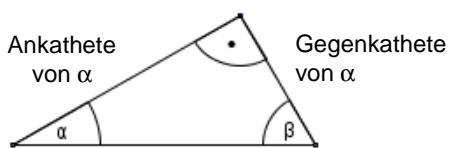
Somit hat das Dreieck einen rechten Winkel gegenüber der Seite z.

2.) Berechne den Flächeninhalt.

$$A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 30 \text{ cm}^2$$

8. Trigonometrie (Sinus, Cosinus, Tangens)

In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die einem spitzen Winkel gegenüberliegende Kathete seine **Gegenkathete**, die andere seine **Ankathete**.



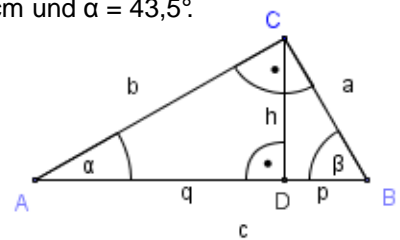
$$\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \sin \alpha$$

$$\frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \cos \alpha$$

$$\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \tan \alpha$$

Gegeben sind b = 4,5 cm und $\alpha = 43,5^\circ$.

Gesucht sind q und h.



Lösung:

$$\frac{h}{b} = \sin 43,5^\circ \quad | \cdot b$$

$$h = b \cdot \sin 43,5^\circ = 4,5 \text{ cm} \cdot \sin 43,5^\circ = 3,1 \text{ cm}$$

$$\frac{q}{b} = \cos 43,5^\circ \quad | \cdot b$$

$$q = b \cdot \cos 43,5^\circ = 4,5 \text{ cm} \cdot \cos 43,5^\circ = 2,9 \text{ cm}$$

Beziehung zwischen Sinus, Cosinus und Tangens

Für alle Winkel α mit $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ gilt:

(1) $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$
 $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$

(2) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

(3) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ)$

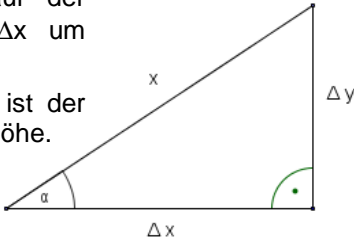
Gegeben ist $\sin \alpha = 0,6$. Berechne: a) $\cos \alpha$ b) $\tan \alpha$

Lösung:

a) aus (2) folgt: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,6^2 = 0,64$
 $\Rightarrow \cos \alpha = 0,8$ (da $\cos \alpha > 0$)

b) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$

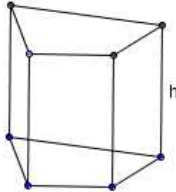
Steigung
 Eine Gerade steigt auf der waagerechten Länge Δx um die Höhe Δy .
 Der Steigungswinkel α ist der Winkel gegenüber der Höhe.
 Die Steigung ist dann
 $m = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = p \%$



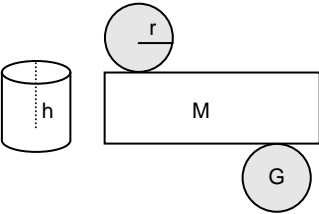
Der Zirler Berg hat die Steigung 16 %.
 a) Wie groß ist der Steigungswinkel α ?
Lösung: $\tan \alpha = 16 \% = 0,16 \Rightarrow \alpha = 9,1^\circ$
 b) Um wie viel Meter steigt der Berg bei einer horizontalen Länge von 1,0 km?
Lösung: $\Delta y = \Delta x \cdot \tan \alpha = 1,0 \text{ km} \cdot 0,16 = 0,16 \text{ km}$

9. Raumgeometrie

Für ein **Prisma** und einen **Zylinder** mit der Grundfläche G , der Mantelfläche M und der Höhe h gilt:
 Volumen: $V = G \cdot h$
 Oberflächeninhalt: $O = 2 \cdot G + M$



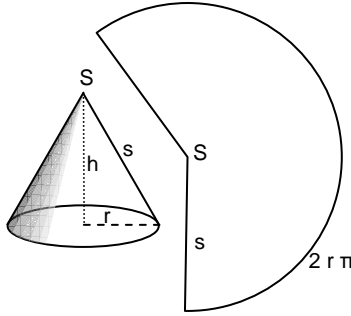
Speziell für einen **Zylinder** mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h gilt:
 Volumen: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$
 Inhalt der Mantelfläche: $M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$
 Oberflächeninhalt: $O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$



Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein achsensymmetrisches Trapez ist, hat die Maße $a = 8,4 \text{ cm}$, $b = 6,2 \text{ cm}$, $c = 4,2 \text{ cm}$, $h_{\text{Trapez}} = 5,8 \text{ cm}$ und $h = 12,1 \text{ cm}$.
 Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt.
Lösung:
 Grundfläche:
 $G = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h_{\text{Trapez}}$
 $G = \frac{1}{2} \cdot (8,4 \text{ cm} + 4,2 \text{ cm}) \cdot 5,8 \text{ cm} = 36,5 \text{ cm}^2$
 Volumen:
 $V = G \cdot h = 36,5 \text{ cm}^2 \cdot 12,1 \text{ cm} = 442 \text{ cm}^3$
 Oberflächeninhalt:
 $M = (a + 2b + c) \cdot h$
 $M = (8,4 \text{ cm} + 2 \cdot 6,2 \text{ cm} + 4,2 \text{ cm}) \cdot 12,1 \text{ cm} = 302,5 \text{ cm}^2$
 $O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot 36,5 \text{ cm}^2 + 302,5 \text{ cm}^2 = 375,5 \text{ cm}^2$

Für eine **Pyramide** und einen **Kegel** mit der Grundfläche G , der Mantelfläche M und der Höhe h gilt:
 Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
 Oberflächeninhalt: $O = G + M$

Speziell für einen **Kegel** mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h gilt:
 Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$
 Inhalt der Mantelfläche: $M = r \cdot s \cdot \pi$
 Oberflächeninhalt: $O = r^2 \cdot \pi + r \cdot s \cdot \pi = (r + s) \cdot r \cdot \pi$



Berechne das Volumen, den Oberflächeninhalt und den Neigungswinkel der Mantellinie eines Kegels mit dem Radius $r = 8 \text{ cm}$ und der Höhe $h = 6 \text{ cm}$.
Lösung:
 Volumen:
 $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (8 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 6 \text{ cm} = 402 \text{ cm}^3$
 Oberflächeninhalt:
 $s = \sqrt{r^2 - h^2} = \sqrt{(8 \text{ cm})^2 - (6 \text{ cm})^2} = 10 \text{ cm}$
 $O = r^2 \pi + r s \pi = ((8 \text{ cm})^2 + 8 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}) \pi = 452 \text{ cm}^2$
 Neigungswinkel:
 $\tan \alpha = \frac{h}{r} = \frac{6 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = 0,75 \Rightarrow \alpha = 37^\circ$

