6d) Funktionsuntersuchung der Funktion: $f(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)^2$

1.) Bestimmung des Definitionsbereich:

➔ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

2.) Prüfen auf Symmetrie:

➔ Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$

$\frac{1}{2}((x)^2-1)^2 \quad \neq \quad -\frac{1}{2}(x^2-1)^2$ → keine Punktsymmetrie vorhanden

➔ Achsensymmetrie: $f(-x) = f(x)$

$\frac{1}{2}((-x)^2-1)^2 \; = \; \frac{1}{2}(x^2-1)^2$ → Achsensymmetrie vorhanden

3.) Bestimmung aller Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen (insbesondere also Nullstellen):

➔ Nullstellen: $0 = f(x)$

$$0 = \frac{1}{2}(x^2-1)^2$$

→ $x_1 = 1;$

→ $x_2 = -1;$

➔ Schnittpunkte mit der y-Achse: $f(0) = \frac{1}{2}(x^2-1)^2$

$f(0) = \frac{1}{2}(0^2-1)^2 = \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}$ → Schnittpunkt mit der y-Achse bei (0|0,5)

4.) Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs (Asymptoten):

➔ Grenzwert: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(x^2-1)^2 = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(x^2-1)^2 = +\infty$$

5.) Berechnung der Ableitung $f'(x)$ und Bestimmung der Monotonie:

➔ Ableitung: $\cancel{f'(x)} = \left(\frac{(x^2-1)^2}{2}\right)$

$$= \frac{(x^2-1)(x^2-1)}{2}$$

$$= \frac{(x^4-2x^2+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 2x^3 - 2x$$

➔ Nullstelle der Ableitung: $0 = 2x^3 - 2x = 2x(x^2-1) = 2x(x-1)(x+1)$

$x_3 = 1; \quad x_4 = -1; \quad x_5 = 0$

➔ Vorzeichentabelle:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	x=1	x>1
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	smf ↘	Min. ~~(0|-1)~~	sms ↗	Max. ~~(0|0)~~	smf ↘	Min ~~(0|1)~~	sms ↗

(-1/0) (0/0,5) (1/0)