Geometrie 2006 V

Gesamtlösung

Nr. 1)

a) Alle Geraden der Schar g_k sind parallel zueinander, da:

1) der Richtungsvektor immer gleich ist, nämlich $\overrightarrow{u_{g_k}} = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$.

2) sich der Aufpunkt durch die Variable k mit $k \in \mathbb{R}$ in x_1-Richtung verschiebt.

$g_k \cap E$

$2\lambda - (-1 + 2\lambda) - 1 =$

$= 2\lambda + 1 - 2\lambda - 1 = 0$ ✓

$\Rightarrow g_k \in E$

b) $g_k: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}-k^2\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{a_{g_k}}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u_{g_k}}}$

$\overrightarrow{a_{g_k}} = \begin{pmatrix}-k^2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + \underbrace{k^2}_{\geq 0} \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

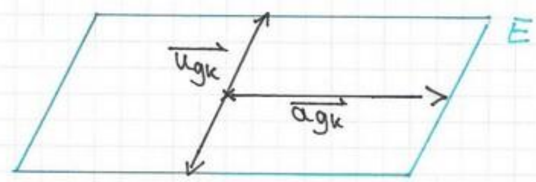
$\Rightarrow \overrightarrow{a_{g_k}}$ ist eine Halbgerade, da $k^2 \geq 0$

Die Geradenschar g_k bildet also eine Halbebene F.

$F: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + k^2 \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

Da alle Geradenscharen von g_k in der Ebene E liegen, bildet g_k eine Halbebene von E (vgl. Nr 1a).

Skizze:



c) $g_k = h$

$$\begin{pmatrix} -k^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad -k^2 + 3\lambda = 2 \\ &\text{II} \quad 2\lambda = 1 - \mu \quad \Rightarrow \mu = 1 - 2\lambda \\ &\text{III} \quad -1 + 2\lambda = 2 + 2\mu \end{aligned}$$

$\mu \to \text{III}$

$$\text{III}' \quad -1 + 2\lambda = 2 + 2(1 - 2\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{5}{6} \quad \to \text{I}$$

$$\text{I}' \quad -k^2 + 3 \cdot \frac{5}{6} = 2$$

$$\Rightarrow k = \pm \sqrt{0,5}$$

$$\mu = 1 - 2 \cdot \frac{5}{6} = -\frac{2}{3} \quad \to h$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S(2 \mid \tfrac{5}{3} \mid \tfrac{2}{3})}}$$

d) Der Winkel φ zwischen der Gerade h und deren senkrechten Projektion h_E auf E entspricht dem Winkel zwischen h und E.

$$\varphi = 90° - \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{\vec{n_E} \circ \vec{u_h}}{|\vec{n_E}| \cdot |\vec{u_h}|} \right|$$

$$|\vec{n_E}| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{u_h}| = \sqrt{5}$$

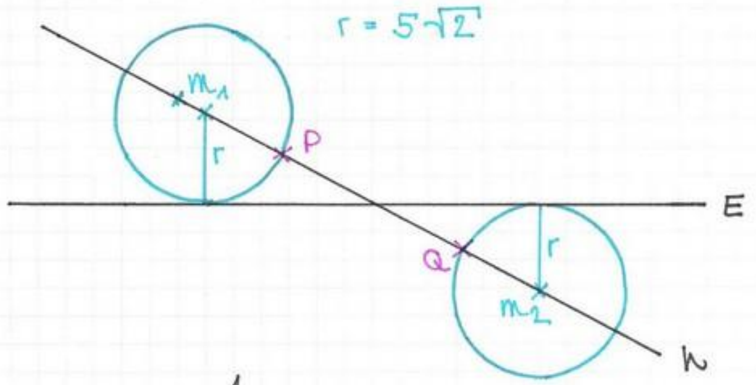
$$\cos \alpha = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} \right| = \left| \frac{-3}{\sqrt{10}} \right| = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \alpha = 18,4°$$

$$\Rightarrow \varphi = 90° - 18,4° = \underline{\underline{71,6°}}$$

Nr 2

Skizze:



a) $E_{HNF}: \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_3 - 1) = 0$

$d(E; h) \overset{!}{=} 5\sqrt{2}$

$h \curvearrowright E_{HNF}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mu-(2+2\mu)-1) = |5\sqrt{2}| \quad | \cdot \sqrt{2}$

$-3\mu - 2 = |10|$

$\Rightarrow \mu_1 = (10+2):(-3) = -4$

$\mu_2 = (-10+2):(-3) = \frac{8}{3}$

$\rightarrow m_1(2 \mid 5 \mid -6)$

$m_2(2 \mid -\frac{4}{3} \mid \frac{22}{3})$

b) $\overline{PQ} = \overline{m_1 m_2} - 2r$

$= \left| \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ 5 - 4/3 \\ -6 - 22/3 \end{pmatrix} \right| - 2r = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6\,2/3 \\ -13\,1/3 \end{pmatrix} \right| - 2r$

$= \sqrt{222\frac{2}{9}} - 2 \cdot 5\sqrt{2}$

$= \underline{\underline{0{,}77}}$

c) $J(0 \mid 0 \mid -1) \in E$ (vgl. Nr 1a, b)

$\vec{j'} = (\vec{j} + 2(\vec{m_1} - \vec{j})$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 5 - 0 \\ -6 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix}$

$E^*: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$E^*: x_2 - x_3 - 21 = 0$

d) $A(-1 \mid 0 \mid -2)$; $C(-1 \mid 1 \mid -1)$

$$K_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}\right]^2 = 50$$

$$K_1: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 6)^2 - 50 = 0$$

$A \overset{?}{\in} K_1$

$$(-1-2)^2 + (-5)^2 + (-2+6)^2 - 50 \overset{?}{=} 0$$

$$9 + 25 + 16 - 50 = 0 \checkmark$$

$\Rightarrow A \in K_1$

$C \overset{?}{\in} K_1$

$$(-1-2)^2 + (1-5)^2 + (-1+6)^2 - 50 \overset{?}{=} 0$$

$$9 + 16 + 25 - 50 = 0 \checkmark$$

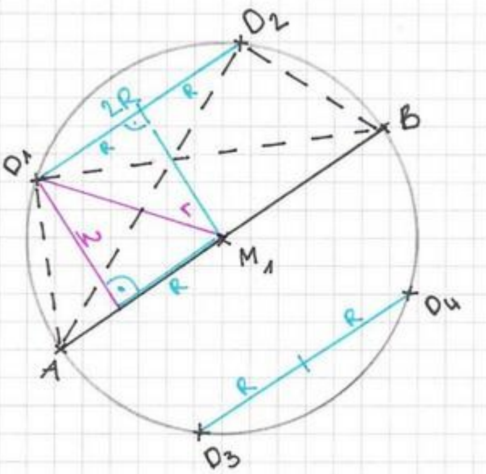
$\Rightarrow C \in K_1$

$$\vec{b} = \vec{a} + 2 \cdot (\vec{m_1} - \vec{a})$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ 5 - 0 \\ -6 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{B(5 \mid 10 \mid -10)}}$

e) Skizze:



$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} G \cdot h$$

$$G = \Delta ABC = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 10+8 \\ -(6-0) \\ 6-0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{396}$$

$$= 3\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{11} \cdot h$$

$$11 = \sqrt{11} \cdot h \rightarrow \underline{\underline{h = \sqrt{11}}}$$

$$r^2 = R^2 + h^2$$

$$\rightarrow R = \sqrt{r^2 - h^2}$$

$$= \sqrt{50 - 11} = \underline{\underline{\sqrt{39}}}$$