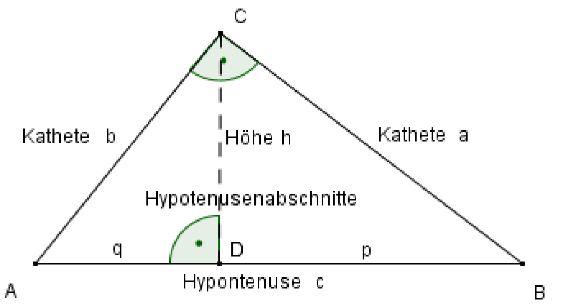
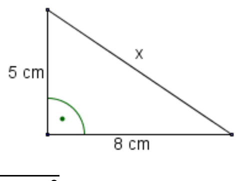
Regiomontanus - Gymnasium Haßfurt - Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 9

Wissen und Können	**Aufgaben, Beispiele, Erläuterungen**
Zahlenmengen	
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ natürliche ganze rationale reelle	$-1 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
Wurzeln	
$\sqrt{a}$ (**Quadratwurzel**) ist diejenige nicht- negative reelle Zahl, deren Quadrat a ergibt. a heißt **Radikant** der Wurzel, er darf nicht negativ sein! Es gilt: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	$\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{(-4)^2} = 4$ $\sqrt{x-2}$ ist nur für $x \geq 2$ definiert $\sqrt{(x-1)^2} = \lvert x-1 \rvert$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ ($a,b \geq 0$) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ($a \geq 0$, $b>0$)	$\sqrt{12{,}5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{25} = 5$ $\frac{\sqrt{12{,}5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$
Die **n-te Wurzel** ($n \in \mathbb{N}$) aus einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt.	$\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = 0{,}1$
Schreibweise: $\sqrt[n]{a}$ oder $a^{\frac{1}{n}}$ und damit für a > 0 : $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$	$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$, $9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ $\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$
Binomische Formel	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$\left(\frac{1}{4}x - 0{,}8y\right)^2 = \left(\frac{1}{4}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}x \cdot 0{,}8y + (0{,}8y)^2 = \frac{1}{16}x^2 - 0{,}4xy + 0{,}64y^2$ $\frac{1}{3}x^2 + 4x + 12 = \frac{1}{3}(x^2 + 12x + 36) = \frac{1}{3}(x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2) = \frac{1}{3}(x+6)^2$ $\left(\frac{1}{2}a + \sqrt{7}b\right)\left(\frac{1}{2}a - \sqrt{7}b\right) = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - (\sqrt{7}b)^2 = \frac{1}{4}a^2 - 7b^2$
Satz des Pythagoras	
Man nennt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite **Hypotenuse**, die beiden anderen Seiten die **Katheten**. Die Höhe zur Hypotenuse zerlegt diese in zwei Hypotenusenabschnitte. 	a) Berechne bei dem rechtwinkligen Dreiecken die fehlende Seitenlänge  $x^2 = (5\,cm)^2 + (8\,cm)^2$ $x = \sqrt{(5\,cm)^2 + (8\,cm)^2} = \sqrt{89\,cm^2} \approx 9{,}43\,cm$ b) Berechne für ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C, a = 28 cm und c = 53 cm die fehlende Seitenlänge. $a^2 + b^2 = c^2$ $b^2 = c^2 - a^2 = (53\,cm)^2 - (28\,cm)^2$ $b = \sqrt{2025\,cm^2} = 45\,cm$

Satz des Pythagoras
In jedem **rechtwinkligen** Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse.
Es gilt: **a² + b² = c²**

Kehrsatz zum Satz des Pythagoras
Wenn in einem Dreieck ABC mit den Seiten a,b und c a² + b² = c² gilt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.

c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Seiten x = 12 cm, y = 5 cm und z = 13 cm.

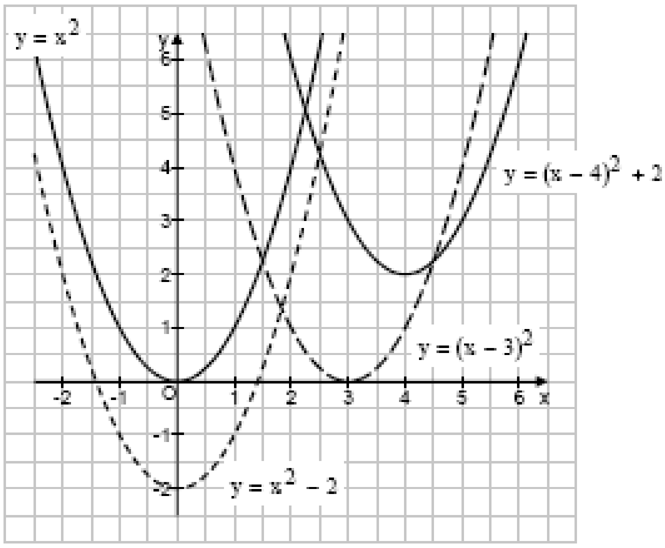
1. Prüfe, ob das Dreieck rechtwinklig ist.
$$z^2=(13\,cm)^2=169\,cm^2$$
$$x^2+y^2=(12\,cm)^2+(5\,cm)^2=169\,cm^2$$
Somit hat das Dreieck einen rechten Winkel gegenüber der Seite z.

2. Berechne den Flächeninhalt.
$$A=\frac{1}{2}\cdot x\cdot y=\frac{1}{2}\cdot 12\,cm\cdot 5\,cm=30\,cm^2$$

Quadratische Funktionen

Eine Funktion der Form $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit a ≠ 0 und x∈IR heißt quadratische Funktion. Den zugehörigen Funktionsgraphen nennt man Parabel. Parabeln haben eine Symmetrieachse. Ihr Schnittpunkt mit der Parabel heißt Scheitel. Die Schnittstellen der Parabeln mit der x - Achse heißen Nullstellen der quadratischen Funktion.
Der Graph der Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^2$ heißt Normalparabel.

Verschiebung der Normalparabel
$(a = 1,\ d.h.\ y = x^2 + bx + c)$



1) $y = x^2$ Scheitel: S(0 | 0) Nullstelle: x = 0

2) $y = x^2 - 2$ Scheitel: S(0 | – 2)
Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$

3) $y = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
Scheitel: S(3 | 0) Nullstelle: x = 3

4) $y = (x - 4)^2 + 2 = x^2 - 8x + 18$
Scheitel: S(4 | 2) Keine Nullstellen

Streckung von Normalparabeln

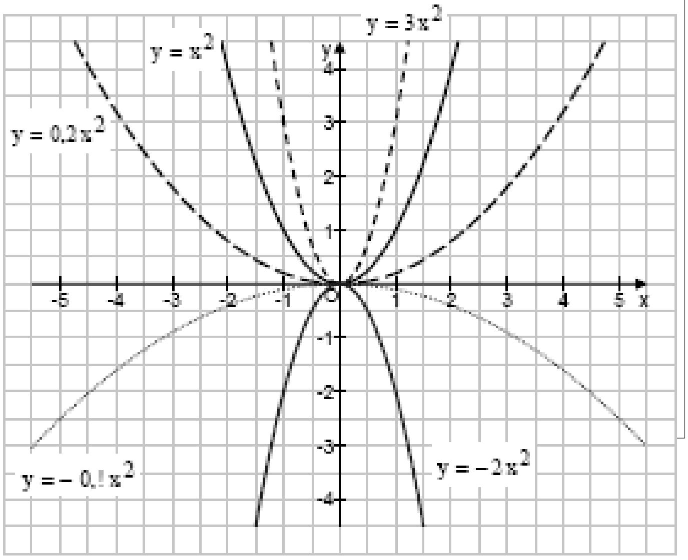
a > 0: Die Parabel ist nach oben offen.

a < 0: Die Parabel ist ach unten offen.

| a | > 1: Die Parabel ist enger als die Normalparabel.

0 < | a | < 1: Die Parabel ist weiter als die Normalparabel.

$(b = c = 0, d.h.\ y = ax^2)$



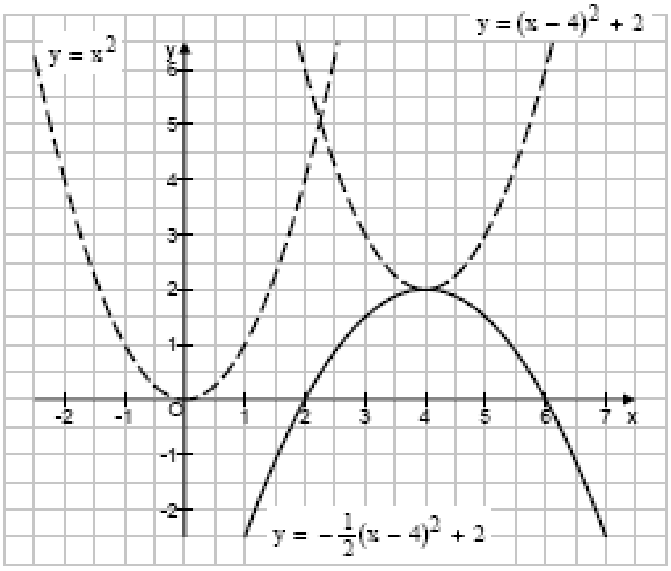
Die Gleichung einer quadratischen Funktion kann in der allgemeinen Form $y = ax^2 + bx + c$ oder in der Scheitelform $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ (→ Scheitel: $S(x_s \mid y_s)$) angegeben werden.

Mittels quadratischer Ergänzung kann die allgemeine Form der Funktionsgleichung in die Scheitelform umgewandelt werden.

Nullstellen
Quadratische Funktionen können keine, eine oder zwei Nullstellen haben:

- Keine Nullstelle:
  Der Scheitel liegt oberhalb der x – Achse ($y_s > 0$) und die Parabel ist nach oben offen (a > 0),
  oder
  der Scheitel liegt unterhalb der x – Achse ($y_s < 0$) und die Parabel ist nach unten offen (a < 0).
- Eine Nullstelle:
  Der Scheitel liegt auf der x – Achse ($y_s = 0$)
- Zwei Nullstellen:
  Der Scheitel liegt oberhalb der x – Achse ($y_s > 0$) und die Parabel ist nach unten offen (a < 0),
  oder
  der Scheitel liegt unterhalb der x – Achse ($y_s < 0$) und die Parabel ist nach oben offen (a > 0).

Quadratische Funktionen können entweder mit Hilfe der Scheitelform oder, ausgehend von der allgemeinen Form, mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf Nullstellen untersucht werden.



$y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 2$

Scheitel: S(4 | 2)
Wertemenge: $W =]-\infty\ ; 2]$
Nullstellen: $x_1 = 2$; $x_2 = 6$
Die zugehörige Parabel ist weiter als die Normalparabel, da $|a| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$.

Allgemeine Form der Funktionsgleichung:
: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$

Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit a ≠ 0 heißt quadratische Gleichung.

Sonderfälle:

1) Gleichungen vom Typ $ax^2 + c = 0$ (Reinquadratische Gleichung)

2) Gleichungen vom Typ $ax^2 + bx = 0$

1.1) $4x^2 - 20 = 0$;
$x^2 = 5$;
$|x| = \sqrt{5}$;
$x_1 = -\sqrt{5}$; $x_2 = \sqrt{5}$

1.2) $\frac{1}{3}x^2 + 3 = 0$;
$x^2 = -9$
Diese Gleichung hat in IR keine Lösung, da Quadrate reeller Zahlen nie negativ sind.

2) $4x^2 - 20x = 0$;(Faktorisieren, d.h. ax ausklammern)
$4x(x - 5) = 0$; (Ein Produkt nimmt genau dann den Wert Null an, wenn einer der Faktoren Null ist.)
$x_1 = 0$; $x_2 = 5$

Lösungsformel: Um eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ auf Lösungen zu untersuchen, bestimmt man zunächst die <u>Diskriminante</u> $D = b^2 - 4ac$.

- Falls $D < 0$, so hat die Gleichung keine Lösung.
- Falls $D = 0$, so hat die Gleichung genau eine Lösung, nämlich $x = -\frac{b}{2a}$
- Falls $D > 0$, so hat die Gleichung die beiden Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

1) $7x^2 - 6x + 2 = 0$; a = 7 , b = – 6 , c = 2

$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = -20 < 0$

$\Rightarrow$ Keine Lösung!

2) $-2x^2 + 12x - 18 = 0$; a = – 2, b = 12, c = – 18

$D = 12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-18) = 0$

$\Rightarrow$ Genau eine Lösung: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot (-2)} = 3$

3) $6x^2 - 7x - 3 = 0$; a = 6, b = – 7 , c = – 3

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 121 > 0$

$\Rightarrow$ Zwei Lösungen :

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm 11}{12}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \text{ und } x_2 = -\frac{1}{3}$$

Ergänzung: Die quadratische Funktion mit der Gleichung $y = 6x^2 - 7x - 3$ hat die Nullstellen 1,5 und – 1/3.

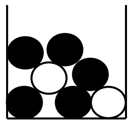
Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein <u>Zufallsexperiment</u> heißt <u>mehrstufig</u>, wenn es aus mehreren Zufallsexperimenten zusammengesetzt ist. Zur Veranschaulichung dienen <u>Baumdiagramme</u>. Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen bzw. Ereignissen können mit Hilfe von <u>Pfadregeln</u> bestimmt werden.

1. Pfadregel:
Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment berechnet man die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades multipliziert.

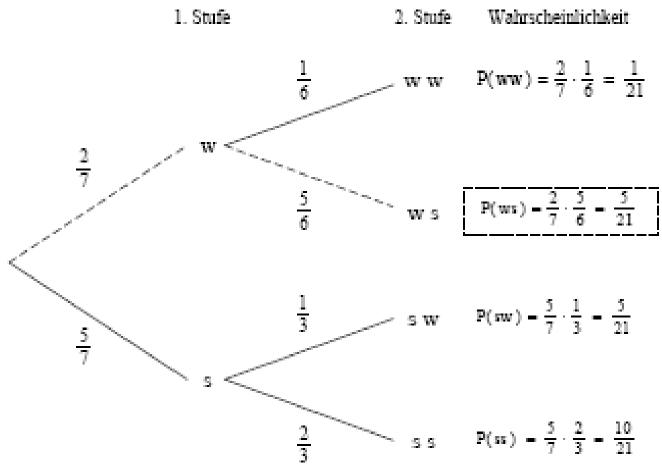
2. Pfadregel:
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

In einer Urne befinden sich zwei <u>w</u>eiße und fünf <u>s</u>chwarze Kugeln.
Aus dieser Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.



Ergebnisraum: Ω = { ww, ws, sw, ss }

Baumdiagramm:



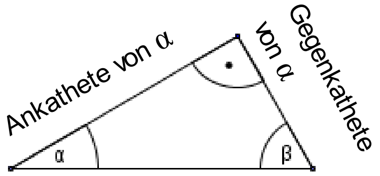
Ereignis E „Kugeln haben die gleiche Farbe“

E = { ww , ss } als Teilmenge des Ergebnisraumes Ω

P(E) = P({ ww , ss }) = P (ww) + P (ss) = $\frac{1}{21} + \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$

Trigonometrie (Sinus, Cosinus, Tangens)

In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die einem spitzen Winkel gegenüberliegende Kathete seine **Gegenkathete**, die andere seine **Ankathete.**

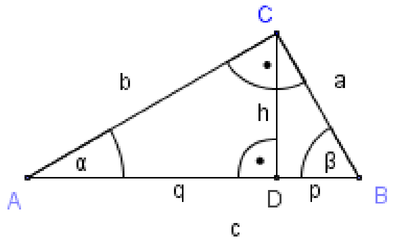


$$\frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse} = \sin\alpha$$

$$\frac{Ankathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse} = \cos\alpha$$

$$\frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha} = \tan\alpha$$

Gegeben sind b = 4,5 cm und α = 43,5°. Gesucht sind q und h.



$$\sin 43{,}5° = \frac{h}{b}$$
$$h = 4{,}5\,cm \cdot \sin 43{,}5° \approx 3{,}10\,cm$$

$$\cos 43{,}5° = \frac{q}{b}$$
$$q = \cos 43{,}5° \cdot 4{,}5\,cm \approx 2{,}94\,cm$$

Beziehung zwischen Sinus, Cosinus und Tangens

Für alle Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$ gilt:

(1) $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ und
$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

(2) $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$

(3) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\alpha \neq 90°)$

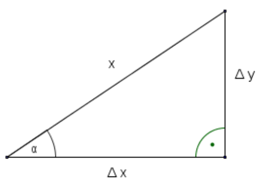
Gegeben ist $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Berechne genaue Werte für a) $\cos\alpha$, b) $\tan\alpha$.

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ Also:
$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$
$\cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, da $\cos\alpha > 0$

b) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

Steigung

Eine Gerade steigt auf der waagerechten Länge Δx um die Höhe Δy , der Steigungswinkel α ist der Winkel gegenüber der Höhe. Die Steigung ist dann



$$m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = p\,\%$$

Der Zirler Berg hat die Steigung 16 %.
a) Wie groß ist der Steigungswinkel α?

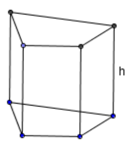
$$\tan\alpha = 16\% = 0{,}16$$
$$\alpha = 9{,}09°$$

b) Um wie viel Meter steigt der Berg, bei einer horizontale Länge von 1 km?

$$\Delta y = \Delta x \cdot \tan\alpha = 1000\mathrm{m} \cdot 0{,}16 = 160\,m$$

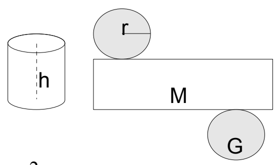
Raumgeometrie

Für ein **Prisma** und einen **Zylinder** mit der Grundfläche G , der Mantelfläche M und der Höhe h gilt:



Volumen: $V = G \cdot h$
Oberflächeninhalt: $O = 2G + M$

Speziell für einen **Zylinder** mit dem Grundkreisradius r und Höhe h gilt:



Volumen: $V = \pi r^2 \cdot h$
Inhalt der Mantelfläche: $M = 2\pi r \cdot h$
Oberflächeninhalt: $O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

Ein gerades Prisma, deren Grundfläche ein achsensymmetrisches Trapez ist, hat die Maße $a = 8{,}4\,cm,\ b = 6{,}2\,cm,\ h_{Trapez} = 5{,}8\,cm,\ c = 4{,}2\,cm$ und $h = 12{,}1\,cm$.
Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt.

Grundfläche:
$$G = \frac{1}{2} \cdot (a + c)\,h_{Trapez} = \frac{1}{2}(8{,}4\,cm + 4{,}2\,cm)\,5{,}8\,cm$$
$$G = 36{,}5\,cm$$

Volumen: $V = G \cdot h = 36{,}5\,cm \cdot 12{,}1\,cm = 442\,cm^2$

Oberflächeninhalt:
$$M = (2 \cdot 6{,}2\,cm + 4{,}2\,cm + 8{,}4\,cm) \cdot 12{,}1\,cm = 302{,}5\,cm^2$$
$$O = 2G + M = 73\,cm^2 + 302{,}5\,cm^2 = 375{,}5\,cm^2$$

Für eine **Pyramide** und einen **Kegel** mit der Grundfläche G , der Mantelfläche M und der Höhe h gilt:

Volumen: $V=\frac{1}{3}G\cdot h$

Oberflächeninhalt: $O=G+M$

Speziell für einen **Kegel** mit dem Grundkreisradius r und Höhe h gilt:

Volumen:

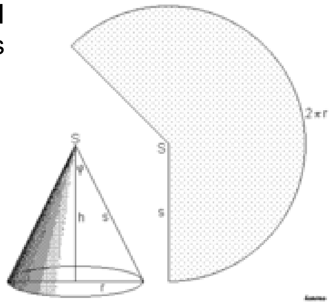
$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$

Inhalt der Mantelfläche:

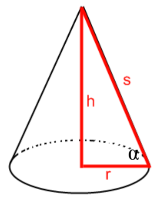
$M=2\pi r\cdot s$

Oberflächeninhalt:

$O=\pi r^2+\pi r\cdot s$



Berechne das Volumen, den Oberflächeninhalt und den Neigungswinkel einer Mantellinie eines Kegels mit dem Radius $r=8\,cm$ und der Höhe $h=6\,cm$



$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi(8\,cm)^2\cdot 6\,cm=402\,cm^2$

$s=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{(8\text{cm})^2+(6\text{cm})^2}=10\,cm$

$O=\pi\cdot(8\,cm)^2+\pi\cdot 8\,cm\cdot 10\,cm=144\pi\,cm^2\approx 452\,cm^2$

$\tan\alpha=\frac{h}{r}=\frac{6\,cm}{8\,cm}=0{,}75$

Neigungswinkel: $\alpha\approx 37°$