Regiomontanus - Gymnasium Haßfurt - Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 8

Wissen und Können	Aufgaben, Beispiele, Erläuterungen

1. Proportionalitäten

direkte Proportionalität

Zwei Größen sind **direkt proportional**, wenn zum n-fachen der einen Größe das n-fache der anderen Größe gehört.

Direkt proportionale Größen erkennt man

- an der **Quotientengleichheit:**

  Für alle Wertepaare (x;y) gilt: $\frac{y}{x} = \text{konstant}$

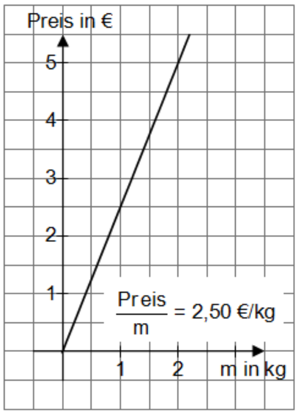
  Den Wert des Quotienten nennt man Proportionalitätsfaktor.
- am Graphen:
  Alle Punkte P(x|y) liegen im Koordinatensystem auf einer **Ursprungsgeraden**.

Äpfel einkaufen:

Die Größen Masse und Preis sind direkt proportional.

Proportionalitätsfaktor:
Preis pro kg (hier: 2,50 €/kg)

m in kg	Preis in €
0,1	0,25
0,2	0,50
0,5	1,25
1,0	2,50
2,0	5,00



indirekte Proportionalität

Zwei Größen sind **indirekt proportional**, wenn zum n-fachen der einen Größe das $\frac{1}{n}$-fache der anderen Größe gehört.

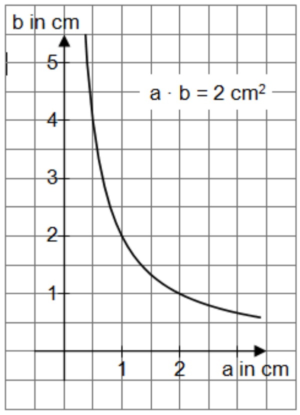
Indirekt proportionale Größen erkennt man an der **Produktgleichheit:**

Für alle Wertepaare (x;y) gilt: x · y = konstant

Alle Punkte P(x|y) liegen im Koordinatensystem auf einer **Hyperbel**.

Die Seitenlängen a und b eines Rechtecks mit dem Flächeninhalt 2 cm² sind indirekt proportional.

a in cm	b in cm
0,25	8,0
0,50	4,0
1,0	2,0
2,0	1,0
4,0	0,50



2. Funktionen

Ein Zuordnung x ↦ y, die jedem Wert für x nur einen einzigen Wert für y zuordnet, heißt **Funktion**.

Funktionsvorschrift: f : x ↦ a x + b

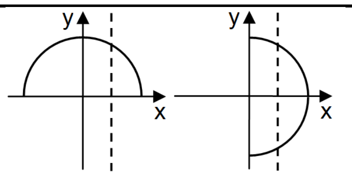
Funktionsterm f(x): a x + b

Funktionsgleichung: y = a x + b oder f(x) = a x + b

Die Menge aller Zahlen, für die bei einer Funktion f ein Funktionswert berechnet werden <u>kann</u>, heißt **maximale Definitionsmenge** $\mathbb{D}_{max}$ oder kurz $\mathbb{D}$.

Die Menge aller Zahlen, für die bei einer Funktion f ein Funktionswert berechnet werden <u>soll</u>, heißt **Definitionsmenge** $\mathbb{D}_f$.

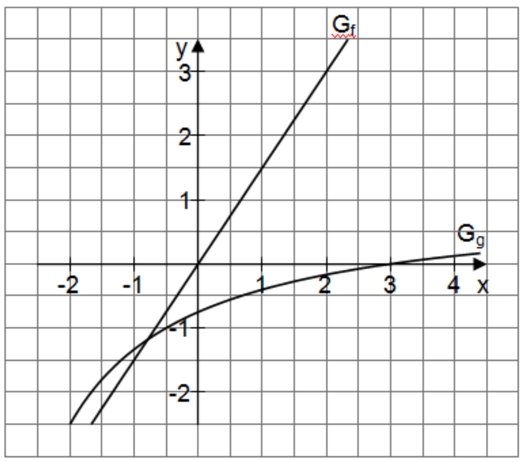
Alle Punkte P(x|f(x)) bilden den **Graph G_f** der Funktion f.



Nullstelle einer Funktion f:

- Schnittstelle des Graphen G_f mit der x-Achse
- Lösung der Gleichung f(x) = 0

Funktion:	f	g
Funktionsvorschrift:	f : x ↦ 1,5x	g : x ↦ $\frac{x-3}{x+4}$
Funktionsgleichung:	f(x) = 1,5x	g(x) = $\frac{x-3}{x+4}$
Definitionsmenge:	$\mathbb{D} = \mathbb{Q}$	$\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-4\}$
Nullstelle:	x = 0	x = 3

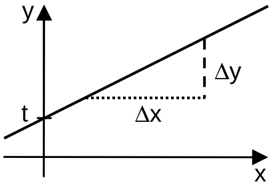


3. Lineare Funktionen

Funktionsgleichung: f (x) = m x + t

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$

Der Graph ist eine **Gerade** mit der **Steigung m** durch den **Punkt (0|t)**.
Den Parameter t nennt man den y-**Achsenabschnitt**.

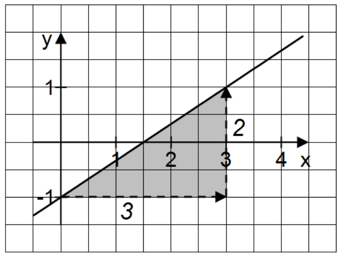


Es gilt: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

m > 0: Die Gerade steigt von links nach rechts.
m < 0: Die Gerade fällt von links nach rechts.
m = 0: Die Gerade verläuft parallel zur x-Achse.

1: Zeichne den Graphen der Funktion $f : x \mapsto \frac{2}{3}x - 1$.

Lösung:
- einen Punkt eintragen, (z.B.(0|-1))
- von da aus Steigungsdreieck einzeichnen „3 nach rechts, 2 nach oben“



2: Bestimme den Funktionsterm der Geraden g, die durch die Punkte A(3|-1) und B(-2|2) verläuft.
Lösung:
- Berechne m: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-(-1)}{-2-3} = -0{,}6$
- Berechne t aus $y_A = m \cdot x_A + t$: $\mathbf{-1} = -0{,}6 \cdot \mathbf{3} + t \Rightarrow t = 0{,}8$
- Es ergibt sich f(x) = -0,6 x + 0,8

<u>Sonderfall:</u> **proportionale Funktion**

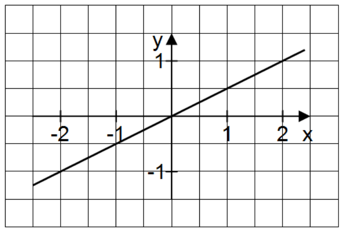
Funktionsgleichung: f(x) = m x

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$

Der Graph ist eine Ursprungsgerade.

f(x) = 0,5x; $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$

x	-4	-2	0	2	4
y	-2	-1	0	1	2



4. Gebrochen rationale Funktionen

Funktionen, deren Funktionsterm ein Bruchterm ist, nennt man **gebrochen rationale Funktionen**.

Ihr Graph ist eine **Hyperbel**.

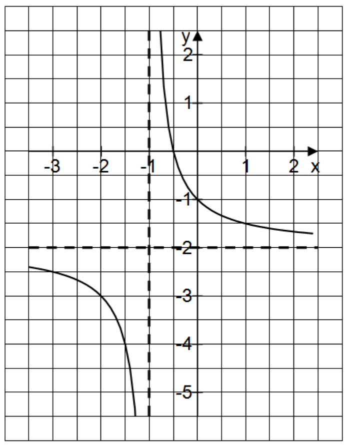
Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$\{Nullstellen des Nenners}

Die Nullstellen des Nenners nennt man **Definitionslücken**.

$f(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$; $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$ \{-1}

x = -1 ist Nullstelle des Nenners, aber nicht des Zählers

⇒ G_f hat die senkrechte Asymptote x = -1



Eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion beliebig genau annähert, nennt man **Asymptote** des Funktionsgraphen.

senkrechte Asymptote:
Gerade mit der Gleichung x = a, wobei a eine Nullstelle des Nenners, aber nicht des Zählers ist

waagrechte Asymptote:
Gerade mit der Gleichung y = b;
entspricht Verlauf des Graphen für betragsmäßig sehr große x-Werte

Für sehr große x gilt:
$\frac{-2x-1}{x+1} \approx \frac{-2x}{x} = -2$

⇒ G_f hat die waagrechte Asymptote y = -2

<u>Sonderfall:</u> **indirekt proportionale Funktion**

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{p}{x}$

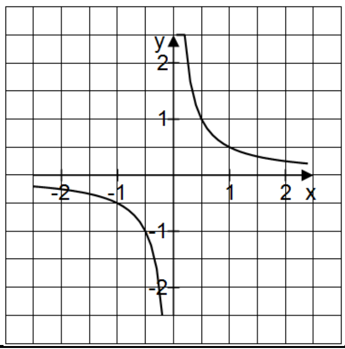
Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$ \{0}

Der Graph ist eine Hyperbel.

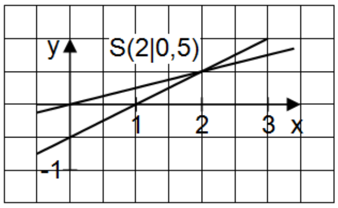
Die beiden Koordinatenachsen sind Asymptoten.

$f(x) = \frac{0{,}5}{x} = \frac{1}{2x}$; $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$ \{0}

x	0,25	0,5	1	2
y	2	1	0,5	0,25



5. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Zwei lineare Gleichungen mit zwei gleichen Variablen bilden ein **lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen**. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen haben genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen.	(I) $3x - y = 15$ (II) $2x + y = 128$
Graphische Lösung Lineare Gleichung ≙ Gleichung einer linearen Funktion - Geraden schneiden sich im Punkt S ⇒ $\mathbb{L} = \{(x_S\|y_S)\}$ - Geraden sind parallel ⇒ $\mathbb{L} = \{\ \}$ - Geraden sind identisch ⇒ $\mathbb{L} = \{(x\|y)\|\ y = mx + t\}$, d.h. die Lösungsmenge enthält alle Punkte der Geraden	(I) $y = 0{,}5x - 0{,}5$ (II) $y = 0{,}25x$ $S(2\|0{,}5)$ ⇒ $\mathbb{L} = \{(2\|0{,}5)\}$ 
Lösung mit dem Einsetzungsverfahren Man löst eine Gleichung nach x bzw. y auf und setzt dann in die andere Gleichung ein.	(I) $x - 2y = 1$ (II) $x + 2y = 5$ nach x auflösen ergibt: (II') $x = 5 - 2y$ (II') in (I) $(5 - 2y) - 2y = 1$ ⇔ $y = 1$ y in (II) $x + 2 \cdot 1 = 5$ ⇔ $x = 3$ ⇒ $\mathbb{L} = \{(3\|1)\}$
Lösung mit dem Gleichsetzungsverfahren Man formt beide Gleichungen nach einer Variablen hin um und setzt sie dann gleich.	(I) $y = 2x - 1$ (II) $y = -x + 1$ (I) = (II) $2x - 1 = -x + 1$ ⇔ $3x = 2$ ⇔ $x = \frac{2}{3}$ x in (II) $y = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$ ⇒ $\mathbb{L} = \{(\frac{2}{3}\|\frac{1}{3})\}$
Lösung mit dem Additionsverfahren Die Gleichungen werden so umgeformt, dass die Koeffizienten von einer der beiden Variablen in beiden Gleichungen denselben Betrag haben. Durch Addition der Gleichungen wird eine Variable eliminiert und man kann die entstandene lineare Gleichung lösen.	(I) $3x - 2y = 34$ (II) $x + y = 128$ $\|\cdot 2$ ergibt: (II') $2x + 2y = 256$ (I) + (II') $5x = 290$ ⇔ $x = 58$ x in (II) $58 + y = 128$ ⇔ $y = 70$ ⇒ $\mathbb{L} = \{(58\|70)\}$

6. Bruchterme und Bruchgleichungen

Vereinfachen und Zusammenfassen von Bruchtermen: Es werden die Rechenregeln für normale Brüche angewendet. **Beachte:** Die Definitionsmenge bleibt unverändert.	1: Vereinfachen des Terms $\frac{x^2 - x}{1 - x}$; $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ $\frac{x^2 - x}{1 - x} = \frac{-x(1 - x)}{1 - x} = -x$ Beachte: Es gilt immer noch $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$! 2: Zusammenfassen einer Summe $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2 + x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x}$ $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0\}$
Lösen von Bruchgleichungen: Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren und entstandene lineare Gleichung lösen. Nicht vergessen: - Überprüfen, ob die Lösung der linearen Gleichung in der Definitionsmenge liegt - Lösungsmenge angeben	$\frac{1}{x - 7} = \frac{14}{(x - 7)(x + 7)}$ $\underbrace{\|\cdot(x + 7)(x - 7)}$ $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-7; 7\}$ *Mit dem Hauptnenner multiplizieren!* $x + 7 = 14$ ⇔ $x = 7 \notin \mathbb{D}$ ⇒ $\mathbb{L} = \{\ \}$ Die Gleichung hat keine Lösung.

7. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Für $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$7^0 = 1$; $(-x)^0 = 1$ $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$; $\frac{1}{z^{-3}} = z^{-(-3)} = z^3$
Gleitkommadarstellung einer Zahl $z \in \mathbb{Q}$*:* $z = a \cdot 10^n$ mit $a \in [1;10[$ und $n \in \mathbb{Z}$	$62\,000\,000 = 6{,}2 \cdot 10^7$; $0{,}000\,36 = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$

8. Zufall und Wahrscheinlichkeit

Einen möglichen Versuchsausgang nennt man **Ergebnis ω**.

Alle Ergebnisse fasst man im **Ergebnisraum Ω** zusammen.

Teilmengen des Ergebnisraums sind **Ereignisse**. Ein **Elementarereignis** besteht aus nur einem Ergebnis.

Für ein Ereignis E gilt immer: $E \subset \Omega$.

Sicheres Ereignis: Ω ; unmögliches Ereignis: { }

Zufallsexperimente, bei denen jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich ist, heißen **Laplace-Experimente**.

Bei Laplace-Experimenten kann man die **Wahrscheinlichkeit P (E)** für ein Ereignis E so berechnen:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

In einer Urne befinden sich fünf Lose mit den Zahlen 1 bis 5. Beim Ziehen eines Loses sind die möglichen Ergebnisse 1, 2, 3, 4 oder 5.

Diese bilden den Ergebnisraum Ω = {1, 2, 3, 4, 5}.

Ein Ereignis wäre z.B. E = {„gerade Losnummer"} = {2,4}

Die Elementarereignisse {1}, {2}, {3}, {4}, {5} haben alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$.

Dieses Zufallsexperiment ist also ein Laplace-Experiment, deshalb gilt für die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu ziehen:

$$P(E) = \frac{2}{5} = 40\%$$

9. Kreis

Der Umfang U und der Flächeninhalt A eines Kreises hängen vom Radius r ab:

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi \qquad A = r^2 \cdot \pi$$

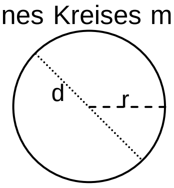
π heißt **Kreiszahl** und hat ungefähr den Wert 3,14.

Die Größen Umfang U und Radius r sind direkt proportional (Proportionalitätsfaktor: 2π).

Die Größen Flächeninhalt A und Radius r sind weder direkt noch indirekt proportional.

1: Berechne Umfang und Flächeninhalt eines Kreises mit einem Durchmesser von 2,0 cm.

Lösung: d = 2,0 cm ⇒ r = 1,0 cm
$U = 2 \cdot 1{,}0\text{ cm} \cdot \pi = 6{,}3\text{ cm}$
$A = (1{,}0\text{ cm})^2 \cdot \pi = 3{,}1\text{ cm}^2$



2: Wie verändern sich Umfang und Flächeninhalt eines Kreises, wenn der Radius verdreifacht wird?

Lösung: Der Umfang verdreifacht sich,
der Flächeninhalt verneunfacht sich.

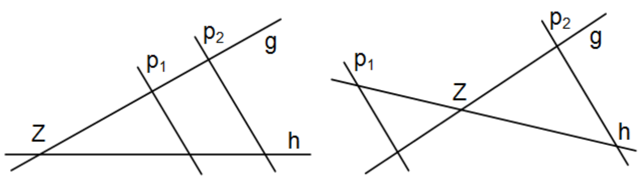
10. Strahlensatz

Strahlensätze

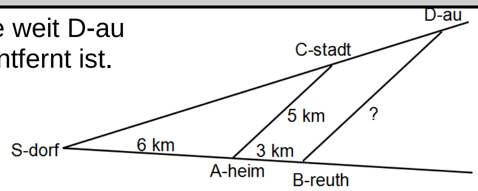
Werden zwei Geraden g und h mit dem Schnittpunkt Z von zwei Parallelen p_1 und p_2 (die Z nicht enthalten) geschnitten, so gilt:

1) Je zwei Abschnitte auf g verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf h.
2) Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von Z aus gemessenen Abstände auf g und h.

Strahlensatzfiguren:



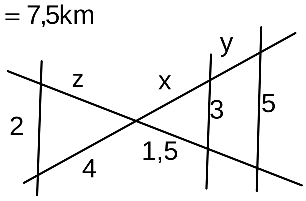
1: Berechne, wie weit D-au von B-reuth entfernt ist.



Lösung:

$$\frac{\overline{BD}}{5\text{km}} = \frac{6\text{km} + 3\text{km}}{6\text{km}} \Leftrightarrow \overline{BD} = 7{,}5\text{km}$$

2: Berechne x, y und z!



Lösung:

$$\frac{x}{4} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow x = 6$$

$$\frac{y+x}{x} = \frac{5}{3} \quad \Leftrightarrow \; y = 4 \qquad \frac{z}{1{,}5} = \frac{4}{x} \quad \Leftrightarrow \; z = 1$$

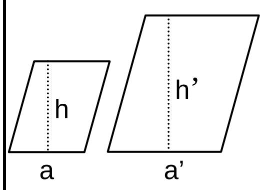
Ähnlichkeit

Zueinander ähnliche Figuren stimmen in allen entsprechenden Winkeln und in allen Verhältnissen entsprechender Seitenlängen überein.

Für die Seitenlängen ähnlicher Figuren gilt also:

$$a' : a = b' : b = \ldots = k; \quad \text{k heißt Ähnlichkeitsfaktor}$$

Ob zwei Dreiecke zueinander ähnlich sind, lässt sich mit Hilfe von **Ähnlichkeitssätzen** feststellen:
WWW-Satz, S:S:S-Satz, S:W:S-Satz, S:s:W-Satz



a = 1,0 cm, a' = 1,5 cm ⇒ k = 1,5
h = 1,2 cm, h' = 1,8 cm ⇒ k = 1,5
d.h. die Parallelogramme sind ähnlich

Beachte:
Für die Flächeninhalte ähnlicher Figuren gilt: $A' : A = k^2$