Regiomontanus - Gymnasium Haßfurt - Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 8

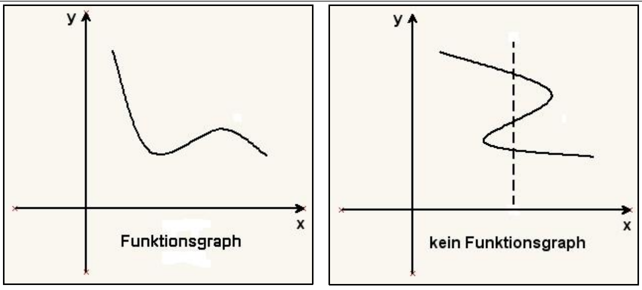
Wissen und Können	**Aufgaben, Beispiele, Erläuterungen**

Funktionen

Ein Zuordnung x I→ y, die jedem Wert für x nur einen einzigen Wert für y zuordnet, heißt **Funktion**.
Funktionsvorschrift: f : x I→ a x + b
Funktionsterm f (x): a x + b
Funktionsgleichung: y = a x + b

Die Menge aller Zahlen, für die bei einer Funktion f ein Funktionswert berechnet werden kann, heißt **maximale Definitionsmenge D_{max}**.
Die Menge aller Zahlen, für die bei einer Funktion f ein Funktionswert berechnet werden soll, heißt **Definitionsmenge D_f**.

Nullstelle: Schnittpunkt des Graphen mit der x – Achse
Eine Nullstelle der Funktion f ist die Lösung der Gleichung f (x) = 0.



Beispiele:

1) f(x) = 5x, g(x) = 3x² – 7, $h(x)=\frac{x-3}{x+4}$

2) $h(x)=\frac{x-3}{x+4}$ => $D_{max}=\mathbb{Q}\setminus\{-4\}$

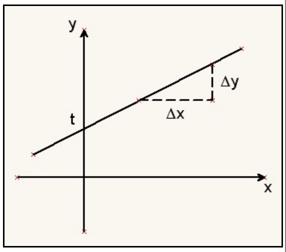
3) $h(x)=\frac{x-3}{x+4}$ => Nullstelle x = 3

Lineare Funktionen

f (x) = m x + t

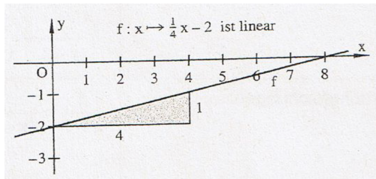
Der Graph ist eine **Gerade** mit der **Steigung m** durch den **Punkt (0 / t)**.
Es gilt:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



Sonderfall:
t = 0 => **proportionale Funktion** f (x) = m x
Der Graph ist eine **Ursprungsgerade**.
Bei einer direkten Proportionalität gilt **Quotientengleichheit**.

1) Zeichne den Graphen
$f(x)=\frac{1}{4}x-2$



Lösung:
Zeichne (0|-2) und davon ausgehend das Steigungsdreieck „4 rechts. 1 hoch".

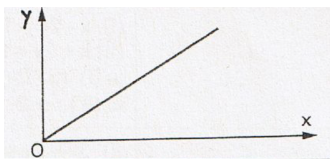
2) Bestimme den Funktionsterm der Geraden g, die durch die Punkte A(3|-1) und B(-2|2) verläuft.

Lösung:
(i) Berechne $m=\frac{y_B-y_A}{x_b-x_A}$, hier $m=\frac{2-(-1)}{-2-3}=-0{,}6$

(ii) Berechne t aus $y_1=mx_1+t$ hier $-1=-0{,}6\cdot 3+t$ $t=\frac{4}{5}$

Also $f(x)=-0{,}6\cdot x+0{,}8$

3)



x	0,2	0,5	3	6	10
y	3	7,5	45	90	150

(m = 15)

Gebrochen rationale Funktionen

Funktionen, deren Funktionsterm ein Bruchterm ist, nennt man **gebrochen rationale Funktionen.**
Ihr Graph ist eine **Hyperbel**.

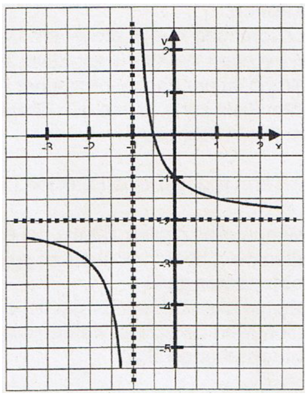
Eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion beliebig genau annähert, nennt man **Asymptote** des Funktionsgraphen.
Man unterscheidet **senkrechte** und **waagrechte Asymptoten**.

Beispiel: 1) $f(x)=\frac{-2x-1}{x+1}$

$D_{max}=\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$

also senkrechte Asymptote: x = -1

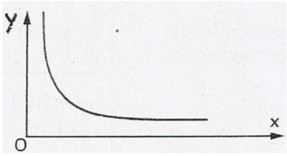
Bestimme die waagerechte Asymptote:
Für sehr große x gilt:
$\frac{-2x-1}{x+1}\approx\frac{-2x}{x}=-2$
=> waagerechte Asymptote: y = -2



Sonderfall:

t = 0 => **indirekt proportionale Funktion** $f(x) = \frac{p}{x}$

Bei einer indirekten Proportionalität gilt **Produktgleichheit**.

2) 

x	0,8	2	4	5	16
y	10	4	2	1,6	0,5

(p = 8)

Gleichungssysteme mit zwei Variablen

a) **Einsetzungsverfahren**
Man löst eine Gleichung nach x bzw. y auf und setzt dann in die andere Gleichung ein.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \wedge \quad y = m_2x + t_2 \quad \Rightarrow \quad a_1x + b_2(m_2x + t_2) + c_1 = 0$$

(I) x – 2y = 1
(II) x + 2y = 5 nach x aufgelöst, ergibt:
(II') x = 5 – 2y
in (I) (5 – 2y) – 2y = 1 <=> y = 1
in (II') x + 2 ·1 = 5 <=> x = 3 => L = {(3|1)}

b) **Additionsverfahren**
Die Gleichungen werden so umgeformt, dass die Koeffizienten von einer der beiden Variablen in beiden Gleichungen denselben Betrag haben. Durch Addition der Gleichungen wird eine Variable eliminiert und man kann die entstandene lineare Gleichung lösen.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \wedge \quad a_2x + (-b_1)y + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_1 + a_2)x + (c_1 + c_2) = 0$$

(I) 3x – 2y = 34
(II) x + y = 128 | · 2
(II') 2x + 2y = 256

(I) + (II'): 5x = 290 <=> x = 58
=> y = 128 – 58 = 70
=> L = {(58|70)}

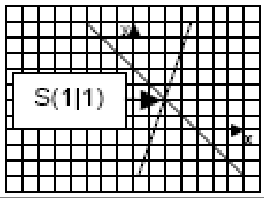
c) **Gleichsetzungsverfahren**
Man formt beide Gleichungen nach einer Variablen hin um und setzt sie dann gleich. (f (x) = g (x))

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = -x + 1 \end{array}\right\} 2x - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \tfrac{2}{3} \Rightarrow y = \tfrac{1}{3}$$
$$\Rightarrow L = \{(\tfrac{2}{3} / \tfrac{1}{3})\}$$

d) **graphisches Verfahren**
Der Schnittpunkt S der Graphen beider Funktionen ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

(I) y = 3x – 2
(II) y = -x + 2

L = {(1|1)}



Bruchterme und Bruchgleichungen

Vereinfachen und Zusammenfassen von Bruchtermen: Es werden die Rechenregeln für normale Brüche angewendet.
Beachte: maximale Definitionsmenge

Beispiel für die Vereinfachung von Bruchtermen:
a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$; D bleibt bei allen Umformungen unverändert:
$\frac{x?-x}{1-x} = \frac{-x\cdot(1-x)}{(1-x)} = -x$

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0\}$
$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x?+x} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{x\cdot(x+1)} = \frac{x+1}{x\cdot(x+1)} = \frac{1}{x}$

Lösen von Bruchgleichungen : Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren und entstandene lineare Gleichung lösen.

Beispiel zum Lösen von Bruchgleichungen
$\frac{1}{x-7} = \frac{14}{(x-7)\cdot(x+7)}$ $\underbrace{| \cdot (x-7)(x+7)}_{\text{„Mit dem Hauptnenner multiplizieren"}}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-7; 7\}$

(x + 7) = 14 <=> $x = 7 \notin D$ => L = {} es gibt keine Lösung

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Für a ∈ *Q* \ { 0 } und n ∈ *Z* gilt:

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$7^0 = 1$; $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$; $(-x)^0 = 1$; $\frac{1}{z^{-3}} = z^{-(-3)} = z^3$

Gleitkommadarstellung einer Zahl z ∈ *Q* :
$z = a \cdot 10^n$ mit a ∈ [1 ; 10 [und n ∈ *Z*

$66200000 = 6{,}62 \cdot 10^7$; $0{,}000036 = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$

Zufall und Wahrscheinlichkeit

Einen möglichen Versuchsausgang nennt man **Ergebnis ω**.
Alle Ergebnisse fasst man im **Ergebnisraum Ω** zusammen. Teilmengen des Ergebnisraums sind **Ereignisse**. Ein **Elementarereignis** besteht aus nur einem Ergebnis

Sicheres Ereignis Ω ; unmögliches Ereignis { }

Zufallsexperimente, bei denen jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich ist, heißen **Laplace-Experimente**. Man kann dann die **Wahrscheinlichkeit P (E)** für ein Ereignis E so berechnen:

$$P(E)=\frac{\text{Anzahl der für E günstigen Element}}{\text{Anzahl der möglichen Elemente}}=\frac{|E|}{|\Omega|}$$

In einer Urne befinden sich fünf Lose mit den Zahlen 1 bis 5. Beim Ziehen eines Loses sind die möglichen Ergebnisse 1, 2, 3, 4 oder 5. Diese bilden den Ergebnisraum:Ω = {1, 2, 3, 4, 5}.

Ein Ergebnis wäre z. B.
E = {„Die Losnummer ist gerade“} = {2,4}
Es ist $E\subset\Omega$.

Die Elementarereignisse {1}, {2}, {3}, {4}, {5} haben alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$.
Dieses Zufallsexperiment ist also ein Laplace-Experiment, deshalb gilt für die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu ziehen:

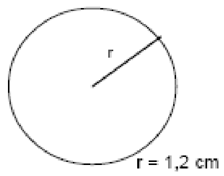
$$P(E)=\frac{2}{5}=40\%$$

Kreis

Der Umfang U und der Flächeninhalt A eines Kreises hängen vom Radius r $(d = 2\cdot r)$ ab:

$$U = 2\cdot r\cdot\pi \qquad A = r^2\cdot\pi$$

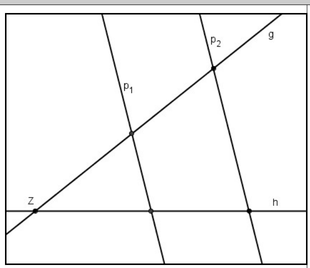
π heißt **Kreiszahl** und hat ungefähr den Wert 3,141592654...... ≈ 3,14



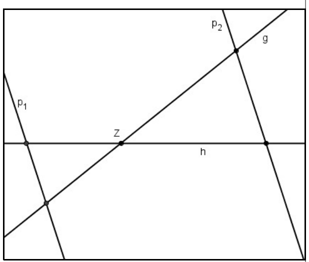
$$U=\pi\cdot 2\cdot 1{,}2\,cm=7{,}54\,cm$$
$$A=\pi\cdot(1{,}2\,cm)^2=4{,}52\,cm^2$$

Strahlensatz

Werden zwei Geraden g und h mit dem Schnittpunkt Z von zwei Parallelen p_1 und p_2 (die Z nicht enthalten) geschnitten, so gilt:

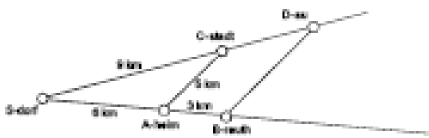


1.) Je zwei Abschnitte auf g verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf h.



2.) Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sie wie die von Z aus gemessenen Abstände auf g und h.

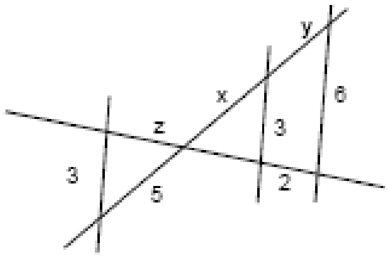
a) Berechne wie weit C-stadt von D-au und D-au von B-reuth entfernt sind.



$$\frac{3km}{6km}=\frac{\overline{CD}}{9\,km} \quad <=> \quad \overline{CD}=4{,}5\,km$$

$$\frac{\overline{BD}}{5\,km}=\frac{6km+3km}{6km} \quad <=> \quad \overline{BD}=7{,}5\,km$$

b) Berechne x, y und z!



$\frac{x}{5}=\frac{3}{3}$ <=> x = 5

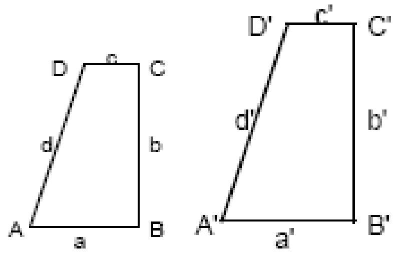
$\frac{y+5}{5}=\frac{6}{3}$ <=> y = 5;

$\frac{5}{5}=\frac{z}{2}$ <=> z = 2

<u>Anwendung:</u>

Zueinander ähnliche Figuren stimmen in allen entsprechenden Winkeln und in allen Verhältnissen entsprechender Seitenlängen überein.

Ob zwei Dreiecke zueinander ähnlich sind, lässt sich mit Hilfe von **Ähnlichkeitssätzen**
(WWW – , S : S : S – , S : W : S – , S : s : W – Satz) feststellen.



c) Strecke:
a':a = b':b = … = k;
k heißt Ähnlichkeitsfaktor

Flächen:
$A'_{A'B'C'D'}:A_{ABCD}=k^2$