Regiomontanus - Gymnasium Haßfurt - Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 9

Wissen und Können	**Aufgaben, Beispiele, Erläuterungen**
1. Zahlenmengen	
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen	-1 $\notin \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$; $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
2. Wurzeln	
$\sqrt{a}$ (**Quadratwurzel**) ist diejenige nicht-negative reelle Zahl, deren Quadrat a ergibt. a heißt **Radikant** der Wurzel, er darf nicht negativ sein! Es gilt: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	$\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{(-4)^2} = 4$ $\sqrt{x-2}$ ist nur für $x \geq 2$ definiert $\sqrt{(x-1)^2} = \lvert x-1 \rvert$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad (a, b \geq 0)$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0; b > 0)$	$\sqrt{12{,}5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{25} = 5$ $\frac{\sqrt{12{,}5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$
Die **n-te Wurzel** ($n \in \mathbb{N}$) aus einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. **Schreibweise**: $\sqrt[n]{a}$ oder $a^{\frac{1}{n}}$ und damit für a > 0 : $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = 0{,}1$ $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$; $9^{0{,}5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ $\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$
3. Binomische Formeln	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$\frac{1}{3}x^2 + 4x + 12 = \frac{1}{3}(x^2 + 12x + 36)$ $= \frac{1}{3}(x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2)$ $= \frac{1}{3}(x+6)^2$ $\left(\frac{1}{4}x - 0{,}8y\right)^2 = \left(\frac{1}{4}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}x \cdot 0{,}8y + (0{,}8y)^2$ $= \frac{1}{16}x^2 - 0{,}4xy + 0{,}64y^2$ $\left(\frac{1}{2}a + \sqrt{7}\,b\right)\left(\frac{1}{2}a - \sqrt{7}\,b\right) = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - (\sqrt{7}\,b)^2$ $= \frac{1}{4}a^2 - 7b^2$

4. Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$ mit $a \neq 0$ heißt **quadratische Gleichung**.

Sonderfälle:

(1) Gleichungen vom Typ $\mathbf{a\,x^2 + c = 0}$
(Reinquadratische Gleichung)
Lösungen ermitteln über $x^2 = -\frac{c}{a}$

(2) Gleichungen vom Typ $\mathbf{a\,x^2 + b\,x = 0}$
Lösungen ermitteln durch Ausklammern von a x

Zu (1):

a) $4\,x^2 - 20 = 0;$
$x^2 = 5;$
$|x| = \sqrt{5};$
$x_1 = -\sqrt{5}, \; x_2 = \sqrt{5}$

b) $\frac{1}{3}x^2 + 3 = 0;$
$x^2 = -9$
Diese Gleichung hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung, da Quadrate reeller Zahlen nie negativ sind.

Zu (2): $4x^2 - 20x = 0;$ *Faktorisieren: a x ausklammern*
$4x\,(x - 5) = 0;$
$x_1 = 0, \; x_2 = 5$ *Ein Produkt nimmt genau dann den Wert Null an, wenn einer der Faktoren Null ist.*

Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

Um eine Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ mit $a \neq 0$ auf Lösungen zu untersuchen, bestimmt man zunächst die **Diskriminante $\mathbf{D = b^2 - 4\,a\,c}$**.

- Falls **D < 0** hat die Gleichung **keine Lösung**.
- Falls **D = 0** hat die Gleichung **genau eine Lösung**, nämlich $x = -\frac{b}{2a}$
- Falls **D >** 0 hat die Gleichung **zwei Lösungen:**

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

1) $7x^2 - 6x + 2 = 0$; $a = 7$, $b = -6$, $c = 2$
$D = (-6)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = -20 < 0$
$\Rightarrow$ Keine Lösung

2) $-2x^2 + 12x - 18 = 0$; $a = -2$, $b = 12$, $c = -18$
$D = 12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-18) = 0$
$\Rightarrow$ Genau eine Lösung: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2\cdot(-2)} = 3$

3) $6x^2 - 7x - 3 = 0$; $a = 6$, $b = -7$, $c = -3$
$D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 121 > 0$
$\Rightarrow$ Zwei Lösungen :

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{121}}{2\cdot 6} = \frac{7 \pm 11}{12}$$

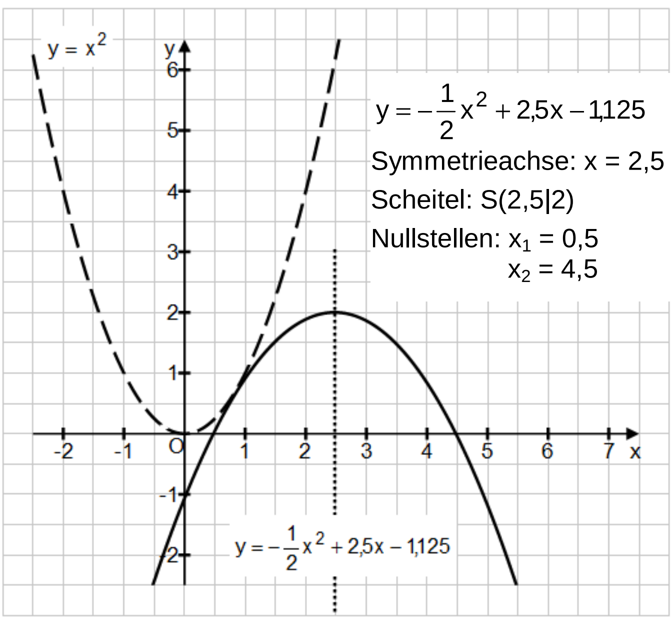
$$x_1 = \frac{3}{2} \text{ und } x_2 = -\frac{1}{3}$$

5. Quadratische Funktion

Eine Funktion der Form $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt **quadratische Funktion**.

Den zugehörigen Funktionsgraphen nennt man **Parabel**. Parabeln haben eine **Symmetrieachse**. Ihr Schnittpunkt mit der Parabel heißt **Scheitel**.

Der Graph der Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^2$ heißt **Normalparabel**.



Die Gleichung einer quadratischen Funktion kann in der **allgemeinen Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$** oder in der **Scheitelform $y = a\,(x - x_S)^2 + y_S$** (Scheitel: $S(x_S|y_S)$) angegeben werden.

Mittels **quadratischer Ergänzung** kann die allgemeine Form der Funktionsgleichung in die Scheitelform umgewandelt werden.

Man kann die Gleichung auch mithilfe der Nullstellen angeben:
- zwei Nullstellen x_1 und x_2: $y = a\,(x - x_1)(x - x_2)$
- eine Nullstelle x_1 : $y = a\,(x - x_1)^2$

Allgemeine Form: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$

Quadratische Ergänzung:

$y = -\frac{1}{2}[x^2 - 8x + 12]$	*a ausklammern*
$y = -\frac{1}{2}[(x^2 - 8x + 4^2) - 4^2 + 12]$	*quadrat. ergänzen*
$y = -\frac{1}{2}[(x - 4)^2) -16 + 12]$	*binomische Formel*
$y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 2$	*vereinfachen*

Scheitelform: $y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 2$ (Scheitel: $S(4|2)$)

Verschiebung der Normalparabel

$a = 1$, d.h. $y = x^2 + bx + c = (x - x_S)^2 + y_S$

Leicht erkennbar an der Scheitelform:

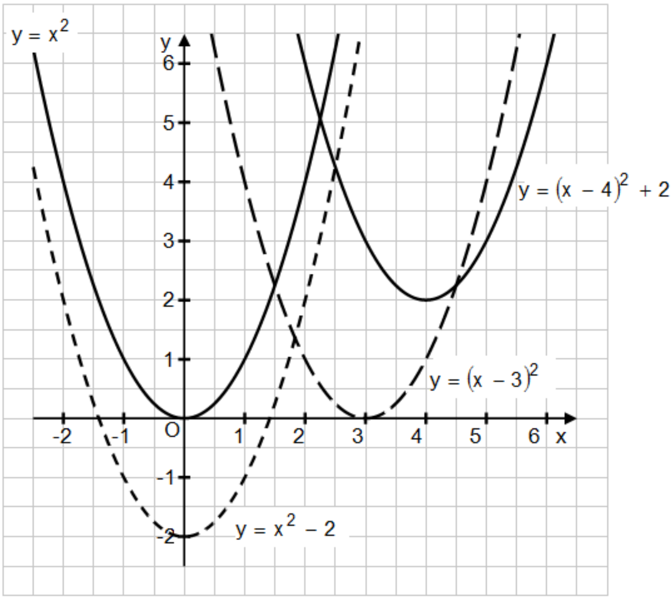
1) $y = x^2$: keine Verschiebung
2) $y = x^2 + y_S$: Verschiebung um y_S in y-Richtung
3) $y = (x - x_S)^2$: Verschiebung um x_S in x-Richtung
4) $y = (x - x_S)^2 + y_S$: Verschiebung um x_S in x-Richtung und y_S in y-Richtung

Je nach Verschiebung kann die neue Parabel keine, eine oder zwei Nullstellen haben:

$y_S > 0$: keine Nullstelle

$y_S = 0$: eine Nullstelle

$y_S < 0$: zwei Nullstellen



1) $y = x^2$ Scheitel: $S(0|0)$; Nullstelle: $x = 0$
2) $y = x^2 - 2$ Scheitel: $S(0|-2)$; Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$
3) $y = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ Scheitel: $S(3|0)$; Nullstelle: $x = 3$
4) $y = (x - 4)^2 + 2 = x^2 - 8x + 18$ Scheitel: $S(4|2)$; keine Nullstellen

Streckung von Normalparabeln

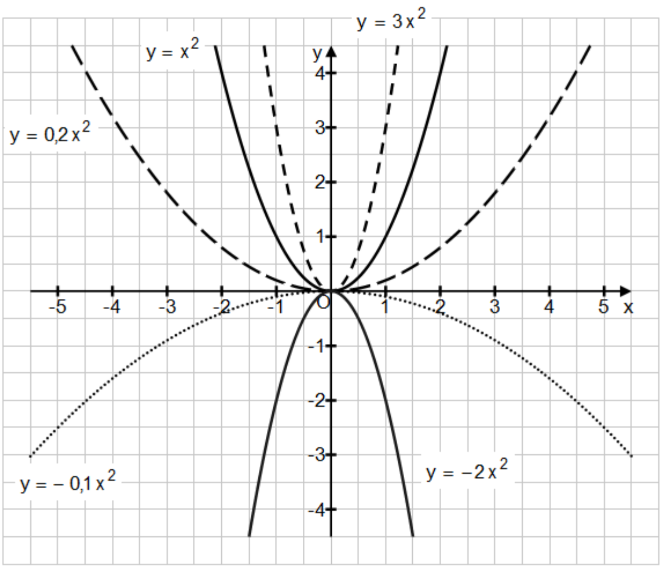
$b = c = 0$, d.h. $y = a\,x^2$

$a > 0$: Die Parabel ist nach oben offen.

$a < 0$: Die Parabel ist nach unten offen.

$|a| > 1$: Die Parabel ist enger als die Normalparabel.

$0 < |a| < 1$: Die Parabel ist weiter als die Normalparabel.



Nullstellen bestimmen

Quadratische Funktionen können entweder mit Hilfe der Scheitelform oder, ausgehend von der allgemeinen Form, mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf Nullstellen untersucht werden.

Quadratische Funktionen können **keine, eine oder zwei Nullstellen** haben:

- Keine Nullstelle:
  Der Scheitel liegt oberhalb der x–Achse ($y_S > 0$) und die Parabel ist nach oben offen ($a > 0$) oder
  der Scheitel liegt unterhalb der x–Achse ($y_S < 0$) und die Parabel ist nach unten offen ($a < 0$).
  oder: $D < 0$
- Eine Nullstelle:
  Der Scheitel liegt auf der x–Achse ($y_S = 0$)
  oder: $D = 0$
- Zwei Nullstellen:
  Der Scheitel liegt oberhalb der x–Achse ($y_S > 0$) und die Parabel ist nach unten offen ($a < 0$) oder
  der Scheitel liegt unterhalb der x–Achse ($y_S < 0$) und die Parabel ist nach oben offen ($a > 0$).
  oder: $D > 0$

$y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$

Anzahl der Nullstellen:

$y_S = 2$: der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse

$a = -0{,}5$: die Parabel ist nach unten geöffnet

$\Rightarrow$ Die quadratische Funktion hat zwei Nullstellen.

Lage der Nullstellen:

$$-\frac{1}{2}(x-4)^2 + 2 = 0;$$
$$(x-4)^2 = 4$$
$$x_1 - 4 = -2 \quad \text{oder} \quad x_2 - 4 = 2$$
$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 6$$

oder:

Anzahl der Nullstellen:

$-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 = 0$; $a = -0{,}5$, $b = 4$, $c = -6$

$D = 4^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-6) = 4 > 0$

$\Rightarrow$ Die quadratische Funktion hat zwei Nullstellen.

Lage der Nullstellen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-0{,}5)} = -(-4 \pm 2)$$
$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 6$$

6. Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein **Zufallsexperiment** heißt **mehrstufig,** wenn es aus mehreren Zufallsexperimenten zusammengesetzt ist. Zur Veranschaulichung dienen **Baumdiagramme.**

Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen bzw. Ereignissen können mit Hilfe von **Pfadregeln** bestimmt werden.

1. Pfadregel:

Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment berechnet man die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades multipliziert.

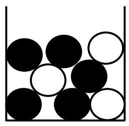
2. Pfadregel:

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

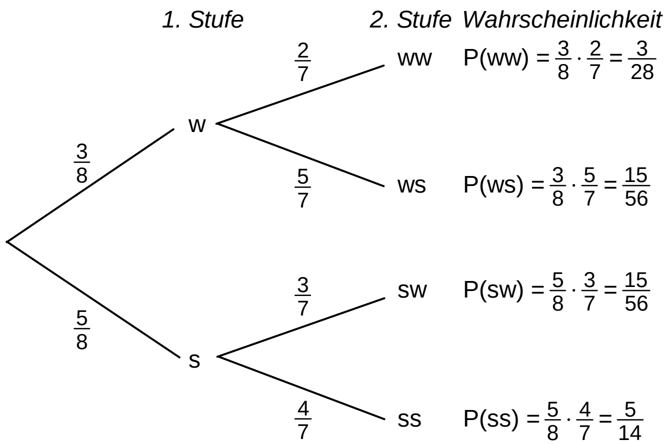
In einer Urne befinden sich drei **w**eiße und fünf **s**chwarze Kugeln.

Aus dieser Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Ergebnisraum: $\Omega = \{ww, ws, sw, ss\}$



Baumdiagramm:



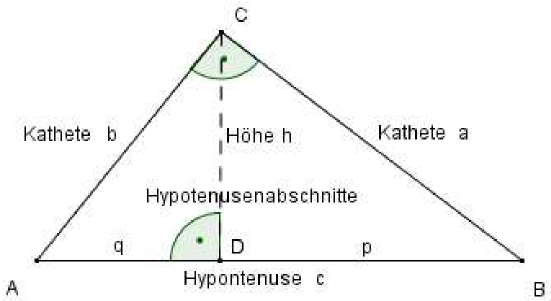
Ereignis E „Kugeln haben die gleiche Farbe“:

$E = \{ww, ss\}$ als Teilmenge des Ergebnisraumes Ω

$P(E) = P(\{ww, ss\}) = P(ww) + P(ss) = \frac{3}{28} + \frac{5}{14} = \frac{13}{28}$

7. Satz des Pythagoras

Man nennt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite **Hypotenuse**, die beiden anderen Seiten **Katheten**. Die Höhe zur Hypotenuse zerlegt diese in zwei Hypotenusenabschnitte.



Satz des Pythagoras

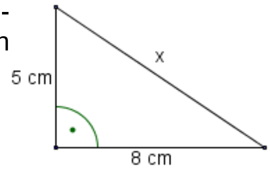
In jedem **rechtwinkligen** Dreieck haben die Quadrate über den Katheten a und b zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse c.

Es gilt: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

Kehrsatz zum Satz des Pythagoras

Wenn in einem Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.

1: Berechne die fehlende Seitenlänge x des rechtwinkligen Dreiecks.



Lösung:

$$x^2 = (5\,\text{cm})^2 + (8\,\text{cm})^2$$

$$x = \sqrt{(5\,\text{cm})^2 + (8\,\text{cm})^2} = \sqrt{89\,\text{cm}^2} = 9{,}4\,\text{cm}$$

2: Berechne für ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C, a = 28 cm und c = 53 cm die fehlende Seitenlänge.

Lösung:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = (53\,\text{cm})^2 - (28\,\text{cm})^2$$

$$b = \sqrt{2025\,\text{cm}^2} = 45\,\text{cm}$$

3: Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Seiten x = 12 cm, y = 5 cm und z = 13 cm.

Lösung:

1.) Prüfe, ob das Dreieck rechtwinklig ist.

$$z^2 = (13\,\text{cm})^2 = 169\,\text{cm}^2$$

$$x^2 + y^2 = (12\,\text{cm})^2 + (5\,\text{cm})^2 = 169\,\text{cm}^2$$

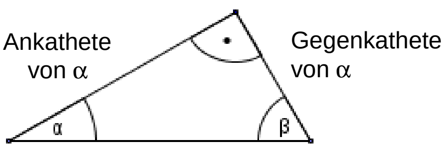
Somit hat das Dreieck einen rechten Winkel gegenüber der Seite z.

2.) Berechne den Flächeninhalt.

$$A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot 12\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 30\,\text{cm}^2$$

8. Trigonometrie (Sinus, Cosinus, Tangens)

In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die einem spitzen Winkel gegenüberliegende Kathete seine **Gegenkathete**, die andere seine **Ankathete.**

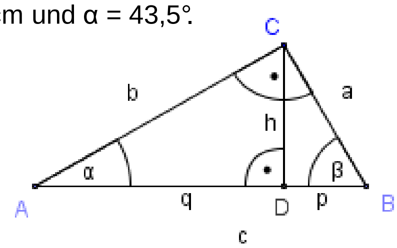


$$\frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}} = \sin\alpha$$

$$\frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}} = \cos\alpha$$

$$\frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Ankathete von }\alpha} = \tan\alpha$$

Gegeben sind b = 4,5 cm und α = 43,5°.
Gesucht sind q und h.



Lösung:

$\frac{h}{b} = \sin 43{,}5° \quad | \cdot b$

$h = b \cdot \sin 43{,}5° = 4{,}5\,\text{cm} \cdot \sin 43{,}5° = 3{,}1\,\text{cm}$

$\frac{q}{b} = \cos 43{,}5° \quad | \cdot b$

$q = b \cdot \cos 43{,}5° = 4{,}5\,\text{cm} \cdot \cos 43{,}5° = 3{,}3\,\text{cm}$

Beziehung zwischen Sinus, Cosinus und Tangens

Für alle Winkel α mit $0 \leq \alpha \leq 90°$ gilt:

(1) $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$
$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

(2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

(3) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\alpha \neq 90°)$

Gegeben ist sin α = 0,6. Berechne: a) cos α b) tan α

Lösung:

a) aus (2) folgt: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - 0{,}6^2 = 0{,}64$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0{,}8$ (da $0 \leq \alpha \leq 90°$ ist $\cos\alpha > 0$)

b) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

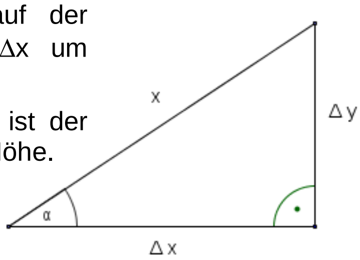
Steigung

Eine Gerade steigt auf der waagerechten Länge Δx um die Höhe Δy.

Der Steigungswinkel α ist der Winkel gegenüber der Höhe.

Die Steigung ist dann

$m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = p\,\%$



Der Zirler Berg hat die Steigung 16 %.

a) Wie groß ist der Steigungswinkel α?

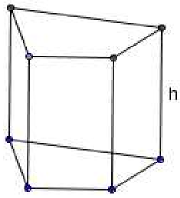
Lösung: $\tan\alpha = 16\,\% = 0{,}16 \Rightarrow \alpha = 9{,}1°$

b) Um wie viel Meter steigt der Berg bei einer horizontalen Länge von 1,0 km?

Lösung: $\Delta y = \Delta x \cdot \tan\alpha = 1{,}0\text{ km} \cdot 0{,}16 = 0{,}16\text{ km}$

9. Raumgeometrie

Für ein **Prisma** und einen **Zylinder** mit der Grundfläche G, der Mantelfläche M und der Höhe h gilt:



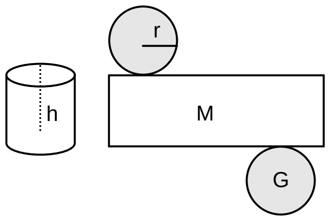
Volumen: $V = G \cdot h$

Oberflächeninhalt: $O = 2 \cdot G + M$

Speziell für einen **Zylinder** mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h gilt:

Volumen:
$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Inhalt der Mantelfläche:
$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$



Oberflächeninhalt:
$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$
$= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$

Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein achsensymmetrisches Trapez ist, hat die Maße $a = 8{,}4$ cm, $b = 6{,}2$ cm, $c = 4{,}2$ cm, $h_{Trapez} = 5{,}8$ cm und $h = 12{,}1$ cm.

Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt.

Lösung:

Grundfläche:

$G = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h_{Trapez}$

$G = \frac{1}{2} \cdot (8{,}4\text{ cm} + 4{,}2\text{ cm}) \cdot 5{,}8\text{ cm} = 36{,}5\text{ cm}^2$

Volumen:

$V = G \cdot h = 36{,}5\text{ cm}^2 \cdot 12{,}1\text{ cm} = 442\text{ cm}^3$

Oberflächeninhalt:

$M = (a + 2b + c) \cdot h$

$M = (8{,}4\text{ cm} + 2 \cdot 6{,}2\text{ cm} + 4{,}2\text{ cm}) \cdot 12{,}1\text{ cm} = 302{,}5\text{ cm}^2$

$O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot 36{,}5\text{ cm}^2 + 302{,}5\text{ cm}^2 = 375{,}5\text{ cm}^2$

Für eine **Pyramide** und einen **Kegel** mit der Grundfläche G, der Mantelfläche M und der Höhe h gilt:

Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

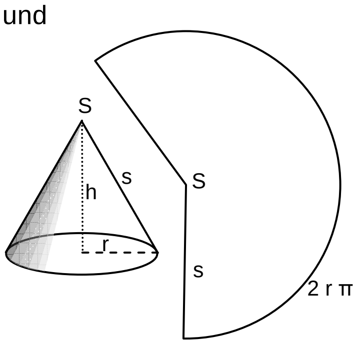
Oberflächeninhalt: $O = G + M$

Speziell für einen **Kegel** mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h gilt:

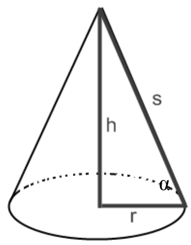
Volumen:
$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

Inhalt der Mantelfläche:
$M = r \cdot s \cdot \pi$

Oberflächeninhalt:
$O = r^2 \cdot \pi + r \cdot s \cdot \pi$
$= (r + s) \cdot r \cdot \pi$



Berechne das Volumen, den Oberflächeninhalt und den Neigungswinkel der Mantellinie eines Kegels mit dem Radius $r = 8$ cm und der Höhe $h = 6$ cm.



Lösung:

Volumen:

$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (8\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 6\text{ cm} = 402\text{ cm}^3$

Oberflächeninhalt:

$s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(8\text{cm})^2 + (6\text{cm})^2} = 10\text{ cm}$

$O = r^2\,\pi + r\,s\,\pi = ((8\text{ cm})^2 + 8\text{ cm} \cdot 10\text{ cm})\,\pi = 452\text{ cm}^2$

Neigungswinkel:

$\tan\alpha = \frac{h}{r} = \frac{6\text{cm}}{8\text{cm}} = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 37°$