Funktionsuntersuchung rationaler Funktionen

Bsp: $f: x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-4}$

- Definitionsmenge

Definitionslücken (Nullstellen des Nenners): $x = \pm 2 \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

- Symmetrie

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = \frac{-x^3}{x^2-4} = -\frac{x^3}{x^2-4} = -f(x) \Rightarrow \text{Punktsymmetrie bzgl. } (0|0)$$

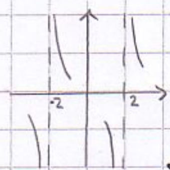
- Schnittpunkte mit den Achsen

y-Achse: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow S_y(0|0)$

x-Achse: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow S_x(0|0) \hat{=} S_y$ ($x = 0$: dreifache NS)

- Verhalten an den Definitionslücken

$$x = 2: \quad \lim_{x \underset{<}{\to} 2} \frac{x^3}{\underbrace{(x-2)(x+2)}_{\text{wird } 0}} = \lim_{x \underset{<}{\to} 2} \underbrace{\frac{x^3}{x+2}}_{\to \frac{8}{4} = 2} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\to 0^-}}_{\to -\infty} = -\infty$$



$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} f(x) = +\infty$ (einfache Polstelle → Vorzeichenwechsel)

$x = -2$: aus der Symmetrie folgt: $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} f(x) = +\infty$

Skizze!

- Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \cdot x}{x^2 \cdot (1 - \frac{4}{x^2})} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\underbrace{1 - \frac{4}{x^2}}_{\to 1}} = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (folgt aus der Punktsymmetrie) oder noch mal wie oben

- Asymptoten

Definitionslücken: $x_1 = -2$; $x_2 = 2 \Rightarrow$ senkrechte Asymptoten: $x = -2$, $x = 2$

Zählergrad = Nennergrad + 1 $\Rightarrow$ schräge Asymptote $a(x)$

Polynomdivision: $x^3 : (x^2-4) = \underbrace{x}_{a(x)} + \underbrace{\frac{4x}{x^2-4}}_{\to 0 \text{ für } x \to \infty} \Rightarrow a(x) = x$

- Monotonie / Extremwerte

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})}{(x^2-4)^2}$$

Nullstellen von $f'(x)$: $x = 0$ (doppelt) ; $x = \pm\sqrt{12}$ (einfach)

↓

kein Extremum
da kein VZW