# Regiomontanus - Gymnasium Haßfurt - Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 7

| Wissen und Können | Aufgaben, Beispiele, Erläuterungen |
|---|---|
| **1. Terme** | |
| Terme sind sinnvolle Rechenausdrücke mit Zahlen, Variablen und Rechenzeichen. | *Bsp.:* Term ohne Variable: $2 \cdot (5 + 3) - 16 : 4$<br>Term mit der Variable x: $T(x) = x^3 - 4x$ |
| **Berechnung von Termwerten**<br>Um einen Termwert zu berechnen, ersetzt man alle im Term vorkommenden Variablen durch Zahlen bzw. Größen. Gleiche Variablen sind durch gleiche Zahlen und Größen zu ersetzen. | *Bsp.:* $T(x) = x^3 - 4x$<br>$T(5) = 5^3 - 4 \cdot 5 = 105$<br>*Bsp.:* Berechne den Wertes des Terms $a^2 + 2ab + b^2$ für $a = 3$ und $b = -4$:<br>$3^2 + 2\cdot3\cdot(-4) + (-4)^2 = 9 - 24 + 16 = 1$ |
| **Äquivalente Terme**<br>Zwei Terme, die <u>bei jeder</u> möglichen Ersetzung der Variablen durch Zahlen jeweils den gleichen Termwert ergeben, nennt man äquivalent. | *Bsp.:* $5x - 5$ und $5(x - 1)$ sind äquivalent.<br>$5x - 5$ und $5(x - 5)$ sind nicht äquivalent. |
| **Termumformungen**<br>- Umformungen in Produkten | *Bsp.:* $4a\cdot2b\cdot a\cdot0{,}5b\cdot2a = 4\cdot2\cdot0{,}5\cdot2\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b = 8\,a^3\,b^2$ |
| - Zusammenfassen gleichartiger Terme | *Bsp.:* $6a^2b - 3ab^2 - 4ba^2 = 2a^2b - 3ab^2$ |
| - Klammerregeln:<br>**Plusklammern** können weggelassen werden.<br>Bei **Minusklammern** müssen die Rechenzeichen geändert werden. | *Bsp.:* $3 + (x - 7) = 3 + x - 7 = x - 4$<br>$x - (3x - y) = x - 3x + y = -2x + y$ |
| - **Ausklammern**:<br>Gleiche Faktoren können vor die Klammer gezogen werden. | *Bsp.:* $4uv - 6vw = 2v \cdot 2u - 2v \cdot 3w = 2v \cdot (2u - 3w)$ |
| - **Multiplizieren von Summen**<br>**Faktor mal (Summen)Klammer (D-Gesetz):**<br>Jeder Summand in der Klammer wird mit dem Faktor multipliziert. (Vorzeichen berücksichtigen) | *Bsp.:* $6z \cdot (2x + \frac{1}{3}z) = 12xz + 2z^2$ |
| **Klammer mal Klammer:**<br>Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert. (Vorzeichen berücksichtigen!) | *Bsp.:* $(-2 - 4k)\cdot(2k - 3) = -2\cdot2k - 2\cdot(-3) - 4k\cdot2k - 4k\cdot(-3)$<br>$= -4k + 6 - 8k^2 + 12k$<br>$= -8k^2 + 8k + 6$ |
| **Nicht vergessen:**<br>**„Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich“** | Berechne: $(a - 2b)^2 + a\cdot(4b - a) + (-2b)^2$ |
| **2. Gleichungen** | |
| Eine Gleichung besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden sind. | *Bsp.:* $2a - 7 = 7a + 3$ |
| **„Kochrezept“ zum Lösen einer Gleichung:**<br>1) Klammern auflösen und die Seiten der Gleichung jeweils so weit wie möglich zusammenfassen.<br>2) Sortieren: Variablen auf eine Seite und die Zahlen auf die andere Seite der Gleichung bringen und jeweils zusammenfassen<br>3) Division durch den Faktor „vor dem x“<br>4) Lösungsmenge angeben | *Bsp.:* $7(-x+1) = 12(2 - x)$<br>$\downarrow$ 1)<br>$-7x + 7 = 24 - 12x \quad \mid +12x - 7$<br>$\downarrow$ 2)<br>$5x = 17 \quad \mid :5$<br>$\downarrow$ 3)<br>$x = 3{,}4$<br>$\downarrow$ 4)<br>$\mathbb{L} = \{3{,}4\}$ |

## 3. Prozentrechnung

Prozentsatz · Grundwert = Prozentwert

Erhöhung des Grundwertes:

Grundwert wird ***um*** x % erhöht ≙ Prozentwert erhöht sich ***auf*** (100 + x) %

Verminderung des Grundwertes:

Grundwert wird ***um*** x % verringert ≙ Prozentwert verringert sich ***auf*** (100 - x) %

1: Der Umsatz eines Unternehmens hat sich im letzten Jahr verdoppelt. Um wie viel Prozent ist er gestiegen?

2: Der Preis für ein Paar Fußballschuhe wurde um 15% auf 63,75 € reduziert.
Was kosteten die Schuhe vorher?

**Mittelwert** = Summe der Werte : Anzahle der Werte

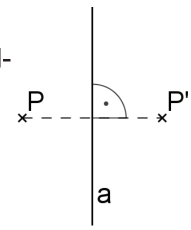
*Bsp.:* Mittelwert der Zahlen 1 bis 6:
(1+2+3+4+5+6) : 6 = 3,5

## 4. Achsen- und Punktsymmetrische Figuren

**Achsenspiegelung**

Für Punkt P, Bildpunkt P’ und Spiegelachse (Symmetrieachse) a gilt

- für P ∉ a:
  [PP’] wird von a senkrecht halbiert
- für P ∈ a: P = P’ (P ist Fixpunkt)




**Eigenschaften**

Punkte auf der Symmetrieachse sind von zwei zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.
Die Achsenspiegelung ist längen-, winkel- und kreistreu.

**Grundkonstruktionen**

- Bildpunkt
- Symmetrieachse, Mittelsenkrechte
- Lot zu einer Geraden durch einen Punkt
- Winkelhalbierende

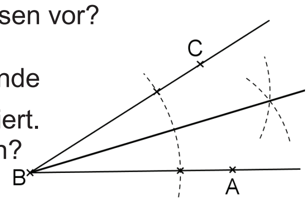
1: Zeichne einen Punkt P und eine Gerade g. Konstruiere den Bildpunkt P’, der bei der Achsenspiegelung von P an g entsteht.

2: Beschreibe, wie man zu zwei Punkten die Spiegelachse konstruieren kann.

3: Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P, der nicht auf g liegt, und konstruiere das Lot zu g durch P.

4: Um das Lot auf eine Gerade g durch einen Punkt P, der nicht auf einer Geraden g liegt, zu konstruieren, kann man den Punkt P an g spiegeln und P mit P’ verbinden. Warum funktioniert das nicht, wenn P auf g liegt? Wie geht man stattdessen vor?

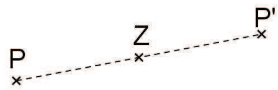
5: Peter hat die Winkelhalbierende des Winkels ∢ABC konstruiert. Wie ist er dabei vorgegangen?




**Punktspiegelung**

Für Punkt P, Bildpunkt P’ und (Symmetrie-) Zentrum Z gilt

- für P ≠ Z: [PP’] wird von Z halbiert
- für P = Z: P = P’ = Z (P ist Fixpunkt)

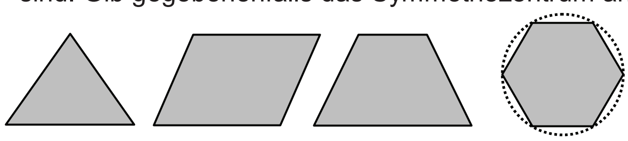



**Eigenschaften**

Zentrum Z, Punkt P und Bildpunkt P’ liegen auf einer Geraden.
Punkt und Bildpunkt sind gleich weit vom Zentrum entfernt, es gilt also $\overline{PZ} = \overline{P'Z}$.
Die Punktspiegelung ist längen-, winkel- und kreistreu.

1: Das Dreieck ABC mit A(0|1), B(3|2) und C(2|3) wird am Punkt Z(4|2) gespiegelt. Konstruiere das Bilddreieck A’B’C’. Gib die Koordinaten der Bildpunkte an.

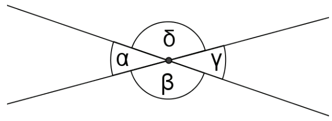
2: Entscheide, welche der Figuren punktsymmetrisch sind. Gib gegebenenfalls das Symmetriezentrum an.



## 5. Winkelbeziehungen

**Winkel an zwei sich schneidenden Geraden:**

**Nebenwinkel** ergänzen sich zu 180°.
**Scheitelwinkel** sind gleich groß.

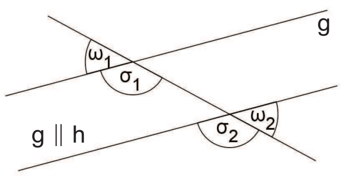



Scheitelwinkel:
$\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$
Nebenwinkel:
$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$
$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$

**Winkel an Doppelkreuzungen**

Wenn zwei Geraden g und h parallel sind, dann sind **Stufenwinkel** und **Wechselwinkel** gleich groß

**Umgekehrt gilt:**
Wenn Stufenwinkel oder Wechselwinkel gleich groß sind, dann sind die Geraden parallel.




Stufenwinkel:
$\sigma_1 = \sigma_2$

Wechselwinkel:
$\omega_1 = \omega_2$

## 6. Kongruente Figuren

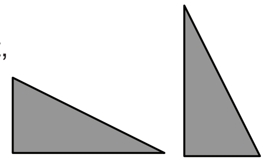
Zwei deckungsgleiche Figuren F und G heißen zueinander kongruent: $F \cong G$

**Kongruenzsätze**

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie:

- in drei Seiten (**SSS**) oder
- in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite (**SsW**) oder
- in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel (**SWS**) oder
- in einer Seite und zwei gleich liegenden Winkeln (**WSW** oder **SWW**) übereinstimmen.

*Bsp.:*
Die beiden Dreiecke sind kongruent, da sie sich durch Drehen, Spiegeln und Verschieben zur Deckung bringen lassen.



1: Begründe, warum ein gleichschenkliges Dreieck durch die Höhe zur Basis in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird.

2: Von einem Dreieck ABC ist bekannt: $a = 6$cm, $b = 5$cm, $\beta = 45°$. Überprüfe, ob das Dreieck durch diese Größen eindeutig konstruiert werden kann.

## 7. Dreiecke

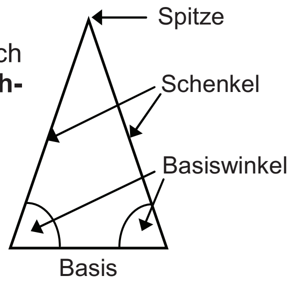
**Innenwinkelsumme**

Die **Innenwinkelsumme in Dreiecken** beträgt **180°**.

Die **Innenwinkelsumme in Vierecken** beträgt **360°**.

**Gleichschenklige Dreiecke**

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt **gleichschenkliges** Dreieck.




<u>Sonderfall:</u>
Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt **gleichseitiges** Dreieck.

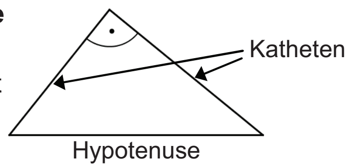
Wichtige Eigenschaften:
In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.
In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich groß (60°-Winkel).

1: In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß. Begründe dies mithilfe der Kongruenzsätze.

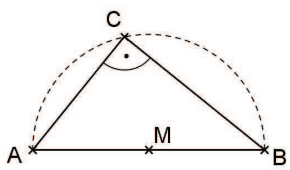
2: Vom gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Spitze bei C sind folgende Größen bekannt: c = 4cm, $\alpha = 60°$ Konstruiere das Dreieck. Was fällt auf?

**Rechtwinklige Dreiecke**

Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinkliges** Dreieck.



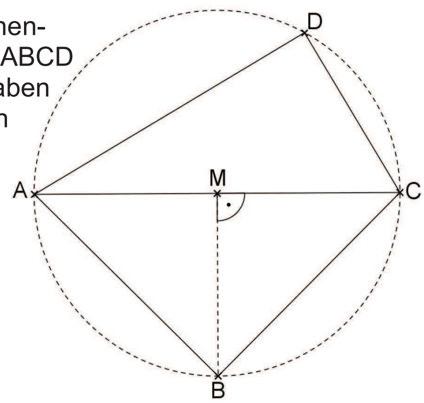

**Satz des Thales**:
Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf einem Halbkreis über [AB], so hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.




**Umgekehrt gilt:**
Hat ein Dreieck ABC in C einen rechten Winkel, so liegt C auf dem Halbkreis (Thaleskreis) über [AB].

1: Begründe, warum ein Dreieck nicht zwei rechte Winkel haben kann.

2: Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ABCD aus folgenden Angaben und beschreibe dein Vorgehen:
$\overline{AC} = 13$ cm
$\overline{DC} = 5$ cm
$\overline{AD} = 12$ cm

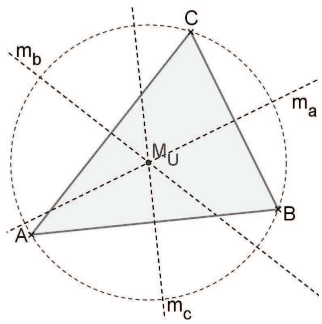


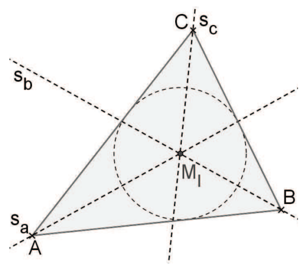

**Besondere Linien im Dreieck**

**Mittelsenkrechte**, **Winkelhalbierende** und **Höhen** (bzw. deren Verlängerung) schneiden sich in einem Punkt.

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der **Mittelpunkt des Umkreises**.

Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist der **Mittelpunkt des Inkreises**.



## *Lösungen:*

### 1. Terme

Termumformungen

$(a - 2b)^2 + a\cdot(4b - a) + (-2b)^2 = (a - 2b)(a - 2b) + 4ab - a^2 + 4b^2 = a^2 - 2ab - 2ab + 4b^2 + 4ab - a^2 + 4b^2 = \mathbf{8b^2}$

### 3. Prozentrechung

Rechnen mit Termen

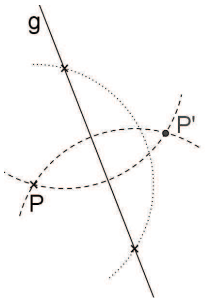
1: $U_{neu} = 2 \cdot U_{alt}$
Prozentsatz: 2 = 200%
A: Der Umsatz ist ***um* 100 %** gestiegen.

2: Reduzierung um 15% ≙ Prozentsatz 85% = 0,85
Neuer Preis: Prozentwert 63,75 €
Alter Preis: Grundwert x
$0{,}85 \cdot x = 63{,}75$ € |: 0,85
$x = 63{,}75$ € : 0,85 = 75 €
A: Vorher kosteten die Fußballschuhe **75 €**.

### 4. Achsen- und Punktsymmetrische Figuren

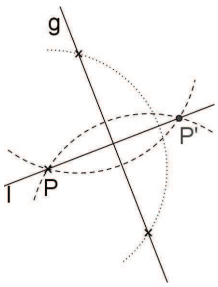
Achsenspiegelung

1:




2: Zeichne je einen Kreis mit dem Radius r um die beiden Punkte. Der gewählte Radius muss dabei größer sein als der Abstand der beiden Punkte.
Die beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten. Die Gerade durch die Schnittpunkte ist die Spiegelachse.

3:

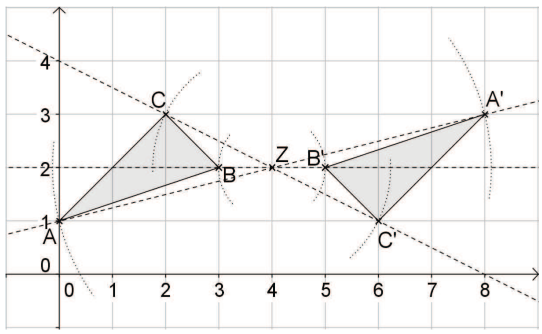



4: Es funktioniert nicht, weil P Fixpunkt der Spiegelung von P an g ist.
Man zeichnet einen Kreis k um P mit einem beliebigen Radius r. Um die Schnittpunkte von k mit g zeichnet man je einen Kreis mit dem gleichen Radius R (R > r). Die Gerade durch die Schnittpunkte dieser beiden Kreise ist das Lot zu g durch P.

5: Er hat zunächst einen Kreis um B mit Radius $r_1$ gezeichnet, danach um die Schnittpunkte des Kreises mit den Schenkeln je einen Kreis mit dem Radius $r_2$ und zuletzt die Halbgerade durch B und den Schnittpunkt der beiden Kreise mit Radius $r_2$.

Punktspiegelung

1:



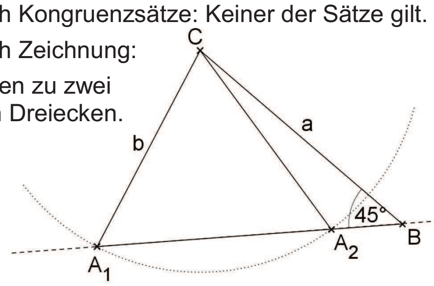

A'(8|3)
B'(5|2)
C'(6|1)

2: Punktsymmetrisch sind das Parallelogramm und das regelmäßige Sechseck. Symmetriezentrum ist jeweils der Schnittpunkt der Diagonalen.

## 6. Kongruente Figuren

1: Begründung z.B. mit dem SSS-Satz:
- Die beiden Teildreiecke haben die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks als gemeinsame Seite.
- Die Teildreiecke haben jeweils einen der beiden gleich langen Schenkel als Seite.
- Die dritte Seite der Teildreiecke ist jeweils die halbe Basis.

2: Das Dreieck ist nicht eindeutig konstruierbar.
- Überprüfung durch Kongruenzsätze: Keiner der Sätze gilt.
- Überprüfung durch Zeichnung:
  Die Angaben führen zu zwei nicht kongruenten Dreiecken.

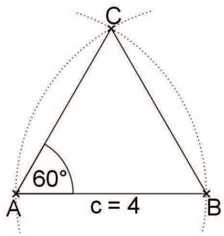



## 7. Dreiecke

Gleichschenklige Dreiecke

1: Die Höhe auf die Basis teilt ein gleichschenkliges Dreieck in zwei kongruente Teildreiecke (Begründung mithilfe der Kongruenzsätze siehe A1 zur Kongruenz). Damit stimmen die beiden Teildreieck in allen Größen überein, also sind auch die Basiswinkel gleich groß.

2:




- Zeichne die Strecke [AB].
- Konstruiere einen 60°-Winkel bei A und bei B:
  Kreis $k_1$ mit Radius r = 4cm um A;
  Kreis $k_2$ mit Radius r = 4cm um B;
  $k_1$ und $k_2$ schneiden sich in C

Man erhält ein gleichseitiges Dreieck.

Rechtwinklige Dreiecke

1: Wenn von drei Winkeln zwei Winkel 90° betragen würden, dann wäre die Innenwinkelsumme in diesem Dreieck größer als 180°.

2: Betrachte die beiden Teildreiecke ABC und ACD.
- Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, die Teildreiecke ABM und BCM damit sind kongruent, also auch gleich groß. Die Höhe [MB] und die Seiten [MA] bzw. [CM] der Teildreiecke sind jeweils Radien des Thaleskreises über [AC] und somit gleich lang. Es gilt:

$$\overline{MB} = \overline{AM} = \overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 6{,}5\text{ cm}$$

$$\mathbf{A_{ABC}} = 2 \cdot A_{ABM} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AM}^2 = (6{,}5\text{ cm})^2 = \mathbf{42{,}25\text{ cm}^2}$$

- Das Dreieck ACD ist rechtwinklig mit rechtem Winkel bei D, da D auf dem Thaleskreis über [AC] liegt.

$$\mathbf{A_{ACD}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot 5\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} = \mathbf{30\text{ cm}^2}$$

Für den Flächeninhalt des Vierecks ABCD ergibt sich:

$$\mathbf{A_{ABCD}} = A_{ABC} + A_{ACD} = 42{,}25\text{ cm}^2 + 30\text{ cm}^2 = \mathbf{72{,}25\text{ cm}^2}$$