Regiomontanus - Gymnasium Haßfurt - Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 7

Wissen und Können	**Aufgaben, Beispiele, Erläuterungen**
1. Terme	
Terme sind sinnvolle Rechenausdrücke mit Zahlen, Variablen und Rechenzeichen.	*Bsp.:* Term ohne Variable: $2 \cdot (5 + 3) - 16 : 4$ Term mit der Variable x: $T(x) = x^3 - 4x$
Berechnung von Termwerten Um einen Termwert zu berechnen, ersetzt man alle im Term vorkommenden Variablen durch Zahlen bzw. Größen. Gleiche Variablen sind durch gleiche Zahlen und Größen zu ersetzen.	*Bsp.:* $T(x) = x^3 - 4x$ $T(5) = 5^3 - 4 \cdot 5 = 105$ *Bsp.:* Berechne den Wertes des Terms $a^2 + 2ab + b^2$ für $a = 3$ und $b = -4$: $3^2 + 2\cdot3\cdot(-4) + (-4)^2 = 9 - 24 + 16 = 1$
Äquivalente Terme Zwei Terme, die <u>bei jeder</u> möglichen Ersetzung der Variablen durch Zahlen jeweils den gleichen Termwert ergeben, nennt man äquivalent.	*Bsp.:* $5x - 5$ und $5(x - 1)$ sind äquivalent. $5x - 5$ und $5(x - 5)$ sind nicht äquivalent.
Termumformungen	
- Umformungen in Produkten	*Bsp.:* $4a\cdot2b\cdot a\cdot0{,}5b\cdot2a = 4\cdot2\cdot0{,}5\cdot2\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b = 8\,a^3\,b^2$
- Zusammenfassen gleichartiger Terme	*Bsp.:* $6a^2b - 3ab^2 - 4ba^2 = 2a^2b - 3ab^2$
- Klammerregeln: **Plusklammern** können weggelassen werden. Bei **Minusklammern** müssen die Rechenzeichen geändert werden.	*Bsp.:* $3 + (x - 7) = 3 + x - 7 = x - 4$ $x - (3x - y) = x - 3x + y = -2x + y$
- **Ausklammern**: Gleiche Faktoren können vor die Klammer gezogen werden.	*Bsp.:* $4uv - 6vw = 2v \cdot 2u - 2v \cdot 3w = 2v \cdot (2u - 3w)$
- **Multiplizieren von Summen** **Faktor mal (Summen)Klammer (D-Gesetz):** Jeder Summand in der Klammer wird mit dem Faktor multipliziert. (Vorzeichen berücksichtigen)	*Bsp.:* $6z \cdot (2x + \frac{1}{3}z) = 12xz + 2z^2$
Klammer mal Klammer: Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert. (Vorzeichen berücksichtigen!)	*Bsp.:* $(-2 - 4k)\cdot(2k - 3) = -2\cdot2k - 2\cdot(-3) - 4k\cdot2k - 4k\cdot(-3)$ $= -4k + 6 - 8k^2 + 12$ $= -8k^2 - 4k + 18$
Nicht vergessen: **„Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich“**	Berechne: $(a - 2b)^2 + a\cdot(4b - a) + (-2b)^2$
2. Gleichungen	
Eine Gleichung besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden sind.	*Bsp.:* $2a - 7 = 7a + 3$
„Kochrezept“ zum Lösen einer Gleichung: 1) Klammern auflösen und die Seiten der Gleichung jeweils so weit wie möglich zusammenfassen. 2) Sortieren: Variablen auf eine Seite und die Zahlen auf die andere Seite der Gleichung bringen und jeweils zusammenfassen 3) Division durch den Faktor „vor dem x“ 4) Lösungsmenge angeben	*Bsp.:* $7(-x+1) = 12(2 - x)$ ↓ 1) $-7x + 7 = 24 - 12x$ $\quad \| +12x - 7$ ↓ 2) $5x = 17$ $\quad \| :5$ ↓ 3) $x = 3{,}4$ ↓ 4) $\mathbb{L} = \{3{,}4\}$

3. Prozentrechnung

Prozentsatz · Grundwert = Prozentwert

Erhöhung des Grundwertes:

Grundwert wird ***um*** x % erhöht ≙ Prozentwert erhöht sich ***auf*** (100 + x) %

Verminderung des Grundwertes:

Grundwert wird ***um*** x % verringert ≙ Prozentwert verringert sich ***auf*** (100 - x) %

1: Der Umsatz eines Unternehmens hat sich im letzten Jahr verdoppelt. Um wie viel Prozent ist er gestiegen?

2: Der Preis für ein Paar Fußballschuhe wurde um 15% auf 63,75 € reduziert.
Was kosteten die Schuhe vorher?

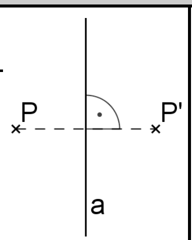
Mittelwert = Summe der Werte : Anzahle der Werte

Bsp.: Mittelwert der Zahlen 1 bis 6:
(1+2+3+4+5+6) : 6 = 3,5

4. Achsen- und Punktsymmetrische Figuren

Achsenspiegelung

Für Punkt P, Bildpunkt P' und Spiegelachse (Symmetrieachse) a gilt



- für $P \notin a$:
  [PP'] wird von a senkrecht halbiert
- für $P \in a$: P = P' (P ist Fixpunkt)

Eigenschaften

Punkte auf der Symmetrieachse sind von zwei zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.
Die Achsenspiegelung ist längen-, winkel- und kreistreu.

Grundkonstruktionen

- Bildpunkt
- Symmetrieachse, Mittelsenkrechte
- Lot zu einer Geraden durch einen Punkt
- Winkelhalbierende

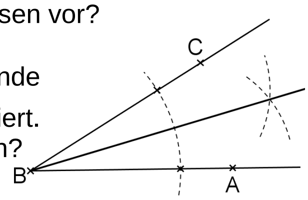
1: Zeichne einen Punkt P und eine Gerade g. Konstruiere den Bildpunkt P', der bei der Achsenspiegelung von P an g entsteht.

2: Beschreibe, wie man zu zwei Punkten die Spiegelachse konstruieren kann.

3: Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P, der nicht auf g liegt, und konstruiere das Lot zu g durch P.

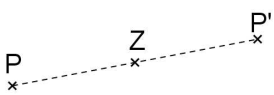
4: Um das Lot auf eine Gerade g durch einen Punkt P, der nicht auf einer Geraden g liegt, zu konstruieren, kann man den Punkt P an g spiegeln und P mit P' verbinden. Warum funktioniert das nicht, wenn P auf g liegt? Wie geht man stattdessen vor?

5: Peter hat die Winkelhalbierende des Winkels ∢ABC konstruiert. Wie ist er dabei vorgegangen?



Punktspiegelung

Für Punkt P, Bildpunkt P' und (Symmetrie-) Zentrum Z gilt



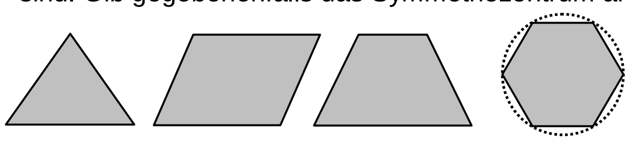
- für $P \neq Z$: [PP'] wird von Z halbiert
- für P = Z: P = P' = Z (P ist Fixpunkt)

Eigenschaften

Zentrum Z, Punkt P und Bildpunkt P' liegen auf einer Geraden.
Punkt und Bildpunkt sind gleich weit vom Zentrum entfernt, es gilt also $\overline{PZ} = \overline{P'Z}$.
Die Punktspiegelung ist längen-, winkel- und kreistreu.

1: Das Dreieck ABC mit A(0|1), B(3|2) und C(2|3) wird am Punkt Z(4|2) gespiegelt. Konstruiere das Bilddreieck A'B'C'. Gib die Koordinaten der Bildpunkte an.

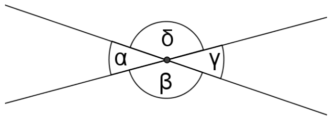
2: Entscheide, welche der Figuren punktsymmetrisch sind. Gib gegebenenfalls das Symmetriezentrum an.



5. Winkelbeziehungen

Winkel an zwei sich schneidenden Geraden:

Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.
Scheitelwinkel sind gleich groß.

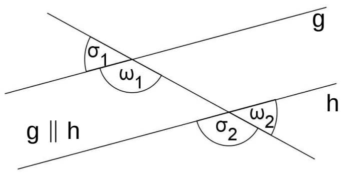


Scheitelwinkel:
$\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$
Nebenwinkel:
$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$
$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$

Winkel an Doppelkreuzungen

Wenn zwei Geraden g und h parallel sind, dann sind **Stufenwinkel** und **Wechselwinkel** gleich groß

Umgekehrt gilt:
Wenn Stufenwinkel oder Wechselwinkel gleich groß sind, dann sind die Geraden parallel.



Stufenwinkel:
$\sigma_1 = \sigma_2$

Wechselwinkel:
$\omega_1 = \omega_2$

6. Kongruente Figuren

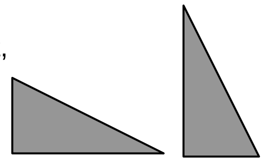
Zwei deckungsgleiche Figuren F und G heißen zueinander kongruent: $F \cong G$

Kongruenzsätze

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie:

- in drei Seiten (**SSS**) oder
- in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite (**SsW**) oder
- in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel (**SWS**) oder
- in einer Seite und zwei gleich liegenden Winkeln (**WSW** oder **SWW**) übereinstimmen.

Bsp.:
Die beiden Dreiecke sind kongruent, da sie sich durch Drehen, Spiegeln und Verschieben zur Deckung bringen lassen.



1: Begründe, warum ein gleichschenkliges Dreieck durch die Höhe zur Basis in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird.

2: Von einem Dreieck ABC ist bekannt: $a = 6\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$, $\beta = 45°$. Überprüfe, ob das Dreieck durch diese Größen eindeutig konstruiert werden kann.

7. Dreiecke

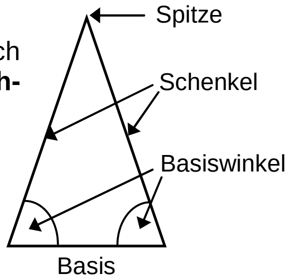
Innenwinkelsumme

Die **Innenwinkelsumme in Dreiecken** beträgt **180°**.

Die **Innenwinkelsumme in Vierecken** beträgt **360°**.

Gleichschenklige Dreiecke

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt **gleichschenkliges** Dreieck.



Sonderfall:
Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt **gleichseitiges** Dreieck.

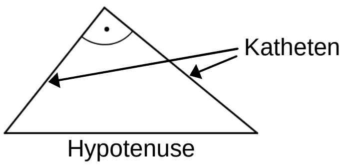
Wichtige Eigenschaften:
In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.
In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich groß (60°-Winkel).

1: In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß. Begründe dies mithilfe der Kongruenzsätze.

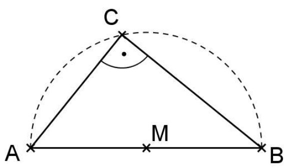
2: Vom gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Spitze bei C sind folgende Größen bekannt: $c = 4\text{cm}$, $\alpha = 60°$
Konstruiere das Dreieck. Was fällt auf?

Rechtwinklige Dreiecke

Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinkliges** Dreieck.



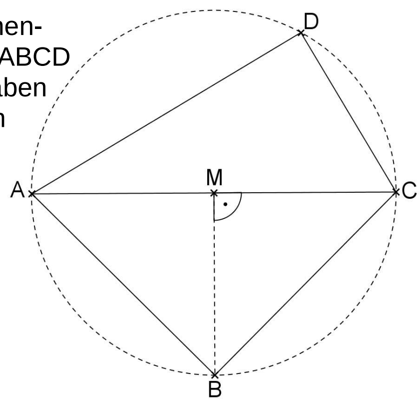
Satz des Thales:
Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf einem Halbkreis über [AB], so hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.



Umgekehrt gilt:
Ein Dreieck ABC in C einen rechten Winkel, so liegt C auf dem Halbkreis (Thaleskreis) über [AB].

1: Begründe, warum ein Dreieck nicht zwei rechte Winkel haben kann.

2: Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ABCD aus folgenden Angaben und beschreibe dein Vorgehen:
$\overline{AC} = 13\text{ cm}$
$\overline{DC} = 5\text{ cm}$
$\overline{AD} = 12\text{ cm}$



Besondere Linien im Dreieck

Mittelsenkrechte, **Winkelhalbierende** und **Höhen** (bzw. deren Verlängerung) schneiden sich in einem Punkt.

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der **Mittelpunkt des Umkreises**.

Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist der **Mittelpunkt des Inkreises**.