1a)

$f(x) = (x-1)lnx$ mit $x \in \mathbb{R}^+$

$f(x) = 0$

$lnx = 0$ für $x = 1$ und $x - 1 = 0$ für $x = 1$

➔ N(1/0) (doppelte Nullstelle)

$$\lim_{x \to 0}(x-1)lnx = \lim_{x \to 0}\left(\underbrace{xlnx}_{\to 0} - \overbrace{lnx}^{\to -\infty}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{(x-1)}_{\to \infty} \overbrace{lnx}^{\to \infty} = \infty$$

b)

$$f'(x) = lnx + \frac{1}{x}(x-1) = lnx + 1 - \frac{1}{x}$$

$f'(1) = ln1 + 1 - 1 = 0$

➔ Waagrechte Tangente bei $x = 1$

Monotonieverhalten:

- $0 < x < 1$: $\ln x < 0 \; und \; 1 - \frac{1}{x} < 0$ → $f'(x) < 0$
- $x > 1$: $lnx > 0 \; und \; 1 - \frac{1}{x} > 0$ → $f'(x) > 0$

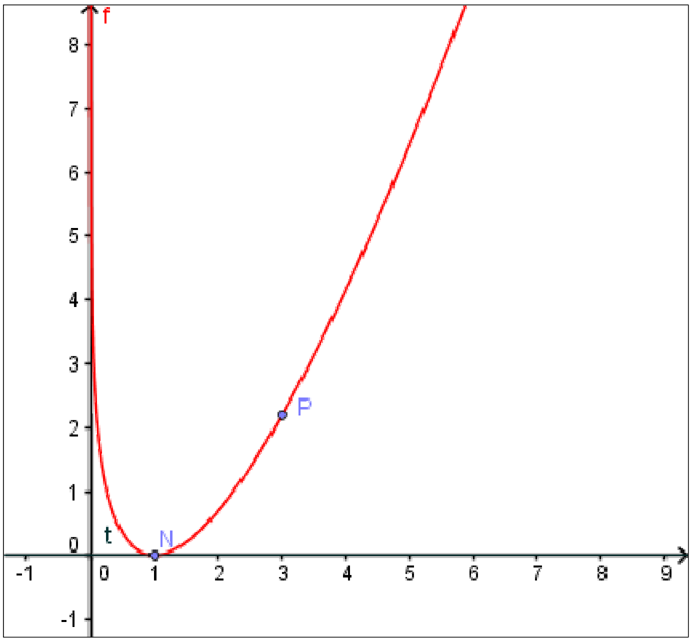
➔ G_f ist streng monoton fallend für $0 < x \leq 1$ und streng monoton steigend für $x \geq 1$ (keine Definitionslücken($x \in \mathbb{R}^+$)).

c)

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$f''(x) > 0$ für alle $x \in D$

➔ G_f ist linksgekrümmt.



$f(3) = 2ln3 \sim 2{,}20$

d)

Aus Aufgabe 1b) folgt, dass G_f im Intervall $]0;1]$ streng monoton fallend ist

➔ f(x) ist umkehrbar

$D_g = W_f = [0;\infty[$
$W_g = D_f =]0;1]$

<u>Für die Umkehrfunktion gilt:</u>

$f'(x) \cdot g'(y) = 1$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Es soll der Grenzwert der Ableitung der Umkehrfunktion für $x \to 0+$ berechnet werden.

➔ $f(1) = 0$ ➔ $g(0) = 1$

$$\lim_{y\to 0+} g'(x) = \frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to 1-} f'(x)}_{\to 0-}} = -\infty$$

<u>Oder:</u>

$$\lim_{y\to 0+} g'(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{\underbrace{f'(x)}_{\to 0-}} = -\infty$$

e)

$$\int \underbrace{(x-1)}_{u'} \underbrace{lnx}_{v}\ dx = \left[\left(\underbrace{0{,}5x^2 - x}_{u}\right) \underbrace{lnx}_{v}\right] - \int \underbrace{(0{,}5x^2 - x)}_{u} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\ dx$$

$$u' = x - 1 \rightarrow u = 0{,}5x^2 - x$$
$$v = lnx \quad \rightarrow v' = \frac{1}{x}$$

$$[(0{,}5x^2 - x)lnx] - \int (0{,}5x^2 - x)\frac{1}{x}dx = [(0{,}5x^2 - x)lnx] - \int 0{,}5x - 1\,dx$$
$$= [(0{,}5x^2 - x)lnx] - [0{,}25x^2 - x] + c$$

$$\lim_{b\to 0}[(0{,}5x^2 - x)lnx]_b^1 - [0{,}25x^2 - x]_b^1$$
$$= \lim_{b\to 0}[0 - \underbrace{(0{,}25b^2 - b)lnb}_{\to 0}] - \left[-0{,}75 - \underbrace{(0{,}25b^2 - b)}_{\to 0}\right]$$
$$= 0 + 0{,}75 = 0{,}75$$

2 a)

$p_t(x) = tx^2 + 2 - t;$ P(1/2) einsetzen in $p_t(x)$

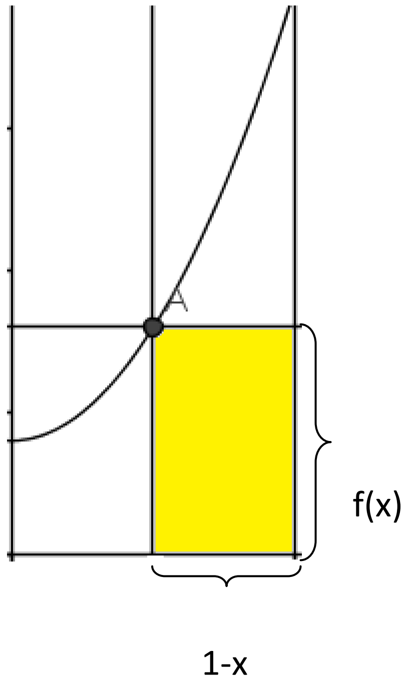
$2 = t \cdot 1 + 2 - t$

$2 = 2 \rightarrow P \in p_t(x)$

$0 < t \leq 2 \rightarrow p(x)$ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel $(0|2-t)$

Bei $t = 2$ liegt der Scheitel im Ursprung. Für $t \rightarrow 0$ wandert der Scheitel auf der y-Achse nach oben und nähert sich dem y-Wert 2 an, erreicht diesen y-Wert aber nicht wegen $t > 0$.

2 b)



Für den Flächeninhalt eines Rechtecks gilt:

$$A(x) = l \cdot b$$

$$A_t(x) = (1-x) \cdot (tx^2 + 2 - t) = -tx^3 - 2x + tx + tx^2 + 2 - t$$

$$= -tx^3 + tx^2 + (t-2) \cdot x + 2 - t$$

2 c)

Aus der Abbildung ist zu vermuten, dass die Graphen im Fall $0 < t < 1{,}5$ keine Extremwerte mit waagrechten Tangenten haben, sondern nur Randextrema für $x = 0$

$$A_t'(x) = -3tx^2 + 2tx + (t-2) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2t \pm \sqrt{4t^2 - 4\cdot(-3t)\cdot(t-2)}}{2\cdot(-3t)};$$

$$D = 16t^2 - 24t$$

Für $D < 0$ haben die Graphen keine Extremwerte mit waagrechten Tangenten

$$16t^2 - 24t < 0$$

$$\underbrace{t}_{>0} \cdot (2t-3) < 0$$

→ $2t - 3 < 0$

$$t < 1{,}5$$

- ➔ Für $t < 1{,}5$ besitzt der Graph keine Extremwerte mit waagrechten Tangenten.

2 d)

$A'_{1,6}\left(\frac{1}{2}\right) = A'_{1,6}\left(\frac{1}{6}\right) = 0 \rightarrow$ Aus der Abbildung ist zu sehen, dass für $x = \frac{1}{2}$ ein Maximum, für $x = \frac{1}{6}$ ein Minimum, und auch für $x = 0$ ein Maximum vorhanden ist.

$$A_{1,6}\left(\frac{1}{2}\right) = -1{,}6 \cdot 0{,}5^3 + 1{,}6 \cdot 0{,}5^2 + (1{,}6 - 2) \cdot 0{,}5 + 2 - 1{,}6 = 0{,}4$$

$$A_{1,6}\left(\frac{1}{6}\right) = -1{,}6 \cdot (\frac{1}{6})^3 + 1{,}6 \cdot (\frac{1}{6})^2 + (1{,}6 - 2) \cdot \frac{1}{6} + 2 - 1{,}6 = 0{,}37$$

$$A_{1,6}(0) = 2 - 1{,}6 = 0{,}4$$

➔ Zwei Rechtecke für $x = 0{,}5$ und $x = 0$ weisen den maximalen Flächeninhalt 0,4 auf.