77/3

Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie. Bestimmen Sie die Nullstellen, ggf. das Verhalten an den Definitionslücken und die Extrema. Skizzieren Sie anschließend G_f.

e) $f(x)=\frac{4+x^2}{x^2-9}$

Symmetrie: $f(-x)=\frac{4+(-x)^2}{(-x)^2-9}=f(x)$ -> Achsensymmetrie (zur y-Achse)

Nullstellen: keine, da Zähler immer positiv, und Definitionslücken bei +3 ^-3

Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{3;-3\}$

Extrema: Ableitung: Quotientenregel:

$$f'(x)=\frac{2x\,(x^2-9)-(4+x^2)\cdot 2x}{(x^2-9)^2}$$
$$=\frac{2x^3-18x-8x-2x^3}{(x^2-9)^2}$$
$$=\frac{-26x}{(x^2-9)^2}$$

... ist bereits in Faktoren zerlegt

Vorzeichentabelle: $f'(x)=0$ für $x_1=0$

		-2		0		2	
-26x	+		+		−		−
f'(x)	+		+		−		−
G_f	↗	DL	↗	HP	↘	DL	↘

$x_1=0$ lokales Maximum

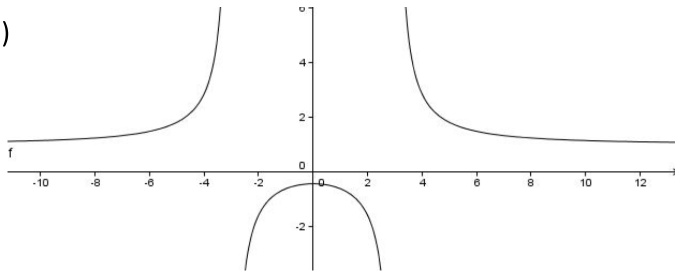
$f(0)=\frac{4+(0)^2}{(0)^2-9}=-\frac{4}{9}$

HP (0 | - $^4/_9$)

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+x^2}{x^2-9}=1$ wegen gleichem Grad in Nenner und Zähler

(VERHALTEN AN DEN DEF.LÜCKEN)

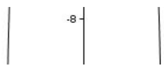
Skizze:



f) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+1}$

Symmetrie: $f(-x)=\frac{(-x)^2-4}{(-x)^2+1}=f(x)$ -> Achsensymmetrie (zur y-Achse)

Nullstellen:



... an der x-Achse:

$f(x) = y = 0$

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} = 0 \quad | \cdot (x^2 + 1)$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad | + 4$$

$$x^2 = 4$$

$x_1 = + 2$

$x_2 = - 2$

-> $N_1 (2 \mid 0)$

$N_2 (-2 \mid 0)$

... an der y-Achse:

$x = 0$

$$f(0) = \frac{(0)^2 - 4}{(0)^2 + 1} = \frac{-4}{1} = - 4$$

-> $S (0 \mid - 4)$

Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Extrema:

Quotientenregel:

Ableitung:

$$f'(x) = \frac{2x\,(x^2 + 1) - (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 8x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{10x}{\underbrace{(x^2 + 1)^2}_{+}}$$

... ist bereits in Faktoren zerlegt

$f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$

Vorzeichentabelle:

		0	
10x	−		+
f'(x)	−		+
G_f	↘	TP	↗

$X_1 = 0$ lokales Minimum

$$f(0) = \frac{(0)^2 - 4}{(0)^2 + 1} = \frac{-4}{1} = - 4$$

TP (0 | -4)

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} = 1$$ wegen gleichem Grad in Nenner und Zähler und Quotient aus Koeffizienten ergibt 1

Skizze: