D2 Übung Bedingte Wahrscheinlichkeit

1. Bei der Hauptuntersuchung von 650 Kraftfahrzeugen wurde festgestellt, dass 10% aller vorgeführten Autos wegen schwerwiegender Mängel fahruntüchtig sind. 60 % dieser Pkws waren älter als sieben Jahre. Dagegen sind nur 20 % der fahrtüchtigen Wagen älter als sieben Jahre.
(Verwende: M ≙ Auto hat Mängel/ist fahruntüchtig   >7 ≙ Auto ist älter als sieben Jahre)

   a) Erstelle eine vollständige Vierfeldertafel.
   b) Gib die Anzahl aller Pkws, die älter als sieben Jahre alt sind, an.

   Es wird zufällig ein Auto ausgewählt.

   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies ein Pkw, der älter als sieben Jahre ist und die TÜV-Plakette nicht erhalten hat?
   d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies ein Pkw, der älter als sieben Jahre ist oder die TÜV-Plakette nicht erhalten hat?
   e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der Wagen einen Mangel, wenn bekannt ist, dass er älter als sieben Jahre ist?

2. Nach Einführung eines neuen Grippeimpfstoffs wird dieser in einer Studie mit 1000 Teilnehmer überprüft. 55% der Studienteilnehmer ließen sich impfen. Im Nachhinein stellte sich heraus, dass insgesamt 200 der Teilnehmer an Grippe erkrankten und davon 25% geimpft waren.
(Verwende: G: „Teilnehmer wurde geimpft"   K: „ Teilnehmer ist erkrankt")

   a) Stelle die Situation ein einem vollständigen Baumdiagramm dar.
   b) Beschreibe was im vorliegenden Fall $P_G(K)$ und $P_{\bar{G}}(K)$ bedeuten.
   c) Beurteile die Wirksamkeit des Impfstoffes mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten $P_G(K)$ und $P_{\bar{G}}(K)$

D2 Lösung: Bedingte Wahrscheinlichkeit

1. a) Hier genügt eine Vierfeldertafel (absolute oder relative Häufigkeit)

Absolute Häufigkeit:

	M	$\overline{M}$	
<7	26	468	494
>7	39 *	117	156
	65	585	650

Relative Häufigkeit:

	M	$\overline{M}$	
<7	0,04	0,72	0,76
>7	0,06*	0,18	0,24
	0,1	0,9	1

* 60% der fahruntüchtigen Autos: 0,6·65=39 (bzw. 0,6·0,1=0,06)

b) entweder ablesen: Es gibt 156 Pkws, die älter als sieben Jahre sind
oder berechnen: 0,24·650 =156 Pkws, die älter als sieben Jahre sind

c) Schlüsselwort „**und**" → Hier wird die Schnittmenge betrachtet: $P(>7 \cap M)=0,06=6\%$

d) Schlüsselwort „**oder**" → Hier wird die Vereinigungsmenge betrachtet
$P(>7 \cup M) = 0,04+0,06+0,18 = 0,28 = 28\%$

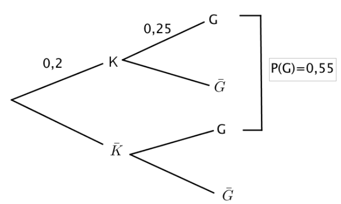
e) Schlüsselwort „**wenn**" ≙ „unter der Bedingung" → Hier ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit gesucht

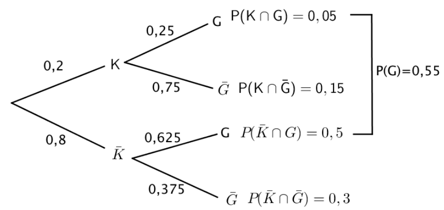
$$P_{>7}(M)=\frac{P(>7 \cap M)}{P(>7)}=\frac{0,06}{0,24}=0,25=25\%$$

2) Aus den Textinformationen kann das linke Baumdiagramm aufgestellt werden. Es ist sinnvoll auf der ersten Stufe nach K, $\overline{K}$ zu unterscheiden. Die übrigen Wahrscheinlichkeiten müssen berechnet werden. Ansatz für $P_{\bar{K}}(G)$:

$P(G)=P(K)\cdot P_K(G)+P(\overline{K})\cdot P_{\bar{K}}(G)$

$0,55 = 0,2\cdot 0,25 + 0,8\cdot P_{\bar{K}}(G)$ → nach $P_{\bar{K}}(G)$ auflösen → $P_{\bar{K}}(G)=0,625$





b) $P_G(K)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Studienteilnehmer an Grippe erkrank ist, unter der Bedingung, dass er geimpft wurde.

$P_{\bar{G}}(K)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Studienteilnehmer an Grippe erkrankt ist, unter der Bedingung, dass er nicht geimpft wurde.

c) $P_G(K)=\frac{P(G \cap K)}{P(G)}=\frac{0,05}{0,55}\approx 9,09\%$ $P_{\bar{G}}(K)=\frac{P(\overline{G} \cap K)}{P(\overline{G})}=\frac{0,15}{0,45}\approx 33,33\%$

Die Wahrscheinlichkeit krank zu werden, ist bei geimpften Personen niedriger als bei nicht-geimpften Personen. Allerdings wurde die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe relativer Häufigkeiten mit 1000 Studienteilnehmer berechnet. Dadurch haben die Werte nur eine begrenzte Aussagekraft.