Aufgabe

S. 161 Nr. 10

Bestimme für den Graphen der Funktion $f(x) = \dfrac{5x - x^3}{x^2 + 3}$:

1. Symmetrieeigenschaften
2. Nullstellen
3. Extrempunkte
4. Wendepunkte
5. Asymptote
6. Abstand: Graph – Asymptote
7. Zeichnung

Symmetrieeigenschaften

$$f(-x) = \frac{5(-x) - (-x)^3}{(-x)^2 + 3} = \frac{-5x + x^3}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{-(5x - x^3)}{x^2 + 3} = -f(x)$$

➔ Punktsymmetrie

$$f(x) = \frac{5x - x^3}{x^2 + 3}$$

Nullstellen

$$5x - x^3 = 0$$

$$x(5 - x^2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \sqrt{5}$$

$$x_3 = -\sqrt{5}$$

$$f(x) = \frac{5x - x^3}{x^2 + 3}$$

Extrempunkte

$$f'(x) = \frac{-x^4 - 14x^2 + 15}{(x^2+3)^2}$$

$$MF: c_1 = -15; c_2 = 1$$

$$-x^4 - 14x^2 + 15 = 0$$

$$c_1 = -15 \neq x^2$$

$$c_2 = 1 = x^2 \rightarrow x_{4/5} = \pm 1$$

$$Substitution: c = x^2$$

$$-c^2 - 14c + 15 = 0$$

$$f(x) = \frac{5x - x^3}{x^2 + 3}$$

Art der Extrempunkte

$$f''(x) = \frac{4x(4x^2 - 36)}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(-1) = \frac{4(-1)(4(-1)^2 - 36)}{((-1)^2+3)^3} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Tiefpunkt}$$

$$f''(1) = \frac{4(1)(4(1)^2 - 36)}{((1)^2+3)^3} = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Hochpunkt}$$

$$f(-1) = \frac{5(-1) - (-1)^3}{(-1)^2+3} = -1 \quad \rightarrow \quad TP(-1/-1)$$

$$f(1) = \frac{5(1) - (1)^3}{(1)^2+3} = 1 \quad \rightarrow \quad HP(1/1)$$

$$f(x) = \frac{5x - x^3}{x^2+3}$$

Wendepunkte

$$f''(x) = \frac{4x(4x^2 - 36)}{(x^2+3)^3}$$

$$4x(4x^2 - 36) = 0 \quad \rightarrow \quad x_6 = 0$$

$$4(x^2 - 9) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{7/8} = \pm 3$$

$$f'(x) = \frac{-x^4 - 14x^2 + 15}{(x^2+3)^2}$$

Beweis der Wendepunkte

Vorzeichentabelle für f‘‘(x)

	-3	0	3	
4x	-	-	+	+
$4(x^2-9)$	+	-	-	+
$(x^2+3)^3$	+	+	+	+
f‘‘(x)	-	+	-	+
f‘(x)	↘	↗	↘	↗

$$f''(x) = \frac{4x(4x^2 - 36)}{(x^2+3)^3}$$

Asymptote

$$(-x^3+5x)\div(x^2+3)=-x+\frac{8x}{x^2+3}$$

$$a(x)=-x$$

$$f(x)=\frac{5x-x^3}{x^2+3}$$

Bestimmung der Punkte mit größtem Abstand zwischen Graph und Asymptote

$$g(x) = \left| f(x) - a(x) \right|$$

$$g(x) = \left| \frac{5x - x^3}{x^2 + 3} - (-x) \right| = \left| \frac{5x - x^3 + x^3 + 3x}{x^2 + 3} \right| = \left| \frac{8x}{x^2 + 3} \right|$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{8x}{x^2+3} \; \textit{für} & x > 0 \\[2ex] \dfrac{-8x}{x^2+3} \; \textit{für} & x < 0 \end{cases} \qquad g'(x) = \begin{cases} \dfrac{8x^2 - 24}{(x^2+3)^2} \; \textit{für} & x > 0 \\[2ex] \dfrac{24 - 8x^2}{(x^2+3)^2} \; \textit{für} & x < 0 \end{cases}$$

Bestimmung der Punkte mit größtem Abstand zwischen Graph und Asymptote

$\underline{x > 0:}$

$$24 - 8x^2 = 0$$
$$8x^2 = 24$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$
$$x_9 = \sqrt{3}$$

$\underline{x < 0:}$

$$8x^2 - 24 = 0$$
$$8x^2 = 24$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$
$$x_{10} = -\sqrt{3}$$

$\underline{x < 0}$

$$g''(x) = \frac{16x(-x^2 + 9)}{(x^2 + 3)^3}$$

$\underline{x > 0}$

$$g''(x) = \frac{-16x(-x^2 + 9)}{(x^2 + 3)^3}$$

Bestimmung der Punkte mit größtem Abstand zwischen Graph und Asymptote

$\underline{x < 0}$

$$g''(-\sqrt{3}) = \frac{16x(-x^2+9)}{(x^2+3)^3} \approx -2{,}31$$

$\underline{x > 0}$

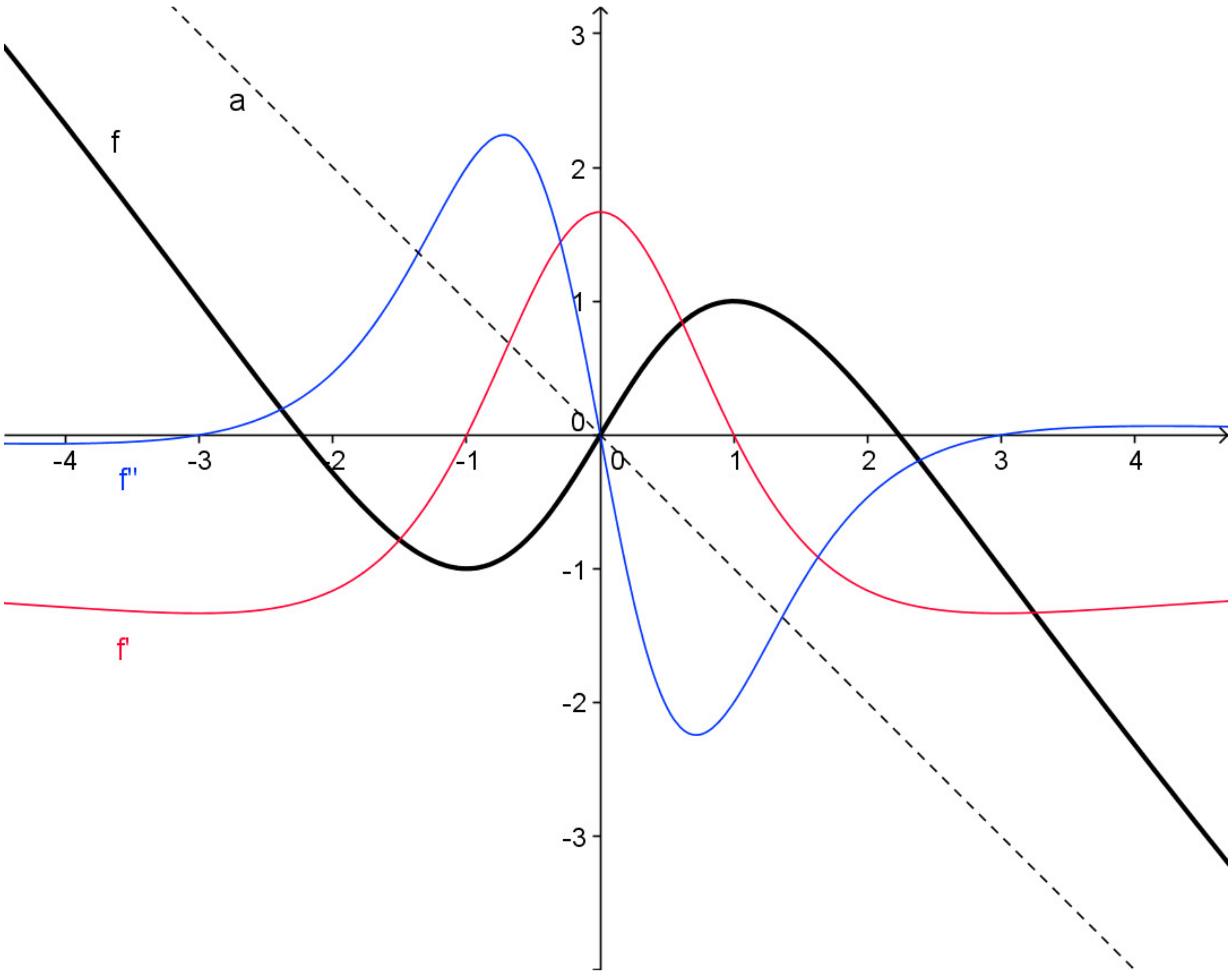
$$g''(\sqrt{3}) = \frac{-16x(-x^2+9)}{(x^2+3)^3} \approx -2{,}31$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left| \frac{8x}{x^2+3} \right| = 0$$

$$f(-\sqrt{3}) \approx 0{,}58 \Rightarrow P_1(-\sqrt{3}\,/\,0{,}58)$$

$$f(\sqrt{3}) \approx 0{,}58 \Rightarrow P_1(\sqrt{3}\,/\,0{,}58)$$

Zeichnung



Zeichnung