Abitur 2016 – Analysis Aufgabengruppe 2

a) Bedingung I: Breite des Tunnelbodens b= 10m bedeutet (da Mittelpunkt des Tunnelbodens M im Ursprung liegt), dass die Nullstellen der Funktion f bei x_1 =-5 und x_2= 5 liegen müssen.

Nullstellen: $p(x) = 0$

$-0,2x^2 +5 = 0$

$5 = 0,2x^2$

$x^2 =25$

$\rightarrow x_1 =-5 \quad x_2= 5$

Bedingung II: Höhe des Tunnels an der höchsten Stelle h=5m → da höchste Stelle am Ursprung, muss der Funktionswert an der Stelle x=0 berechnet werden

$p(0) = -0,2*0^2 +5 = 5$

Zur Berechnung des Schnittwinkels muss die Steigung der Funktion an der Stelle, an der die linke Tunnelwand auf den Tunnelboden trifft, bekannt sein.

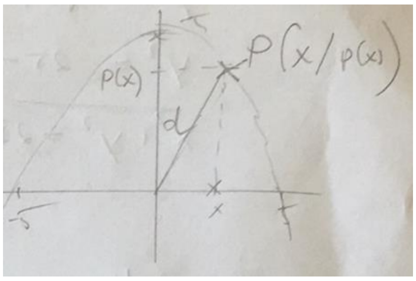
Stelle: x=-5

Steigung an der Stelle x=-5 → ABLEITUNG DER FUNKTION p an der Stelle x=-5

$p'(x) = -0,4x \quad \rightarrow p'(-5) = -0,4*(-5) = 2$

Es gilt: $m = \tan\alpha \rightarrow 2= \tan\alpha \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63,4°$

b) Hinweis: Skizze + bekannte/gesuchte Größe einzeichnen



Satz des Pythagoras

$d^2=x^2+p(x)^2$

$d^2=x^2+(-0,2x^2 +5)^2$ Binomische Formel

$d^2=x^2+0,04x^4 -2x^2 +25$

$d^2 = 0,04x^4 -x^2 +25$

$$d = \sqrt{0,04x^4 - x^2 + 25}$$

c) Der Wert von d ist minimal, wenn $e(x) = 0,04x^4 -x^2 +25$ minimal

→ Berechne das Minimum von e

$e'(x) = 0,16x^3 -2x$

$e'(x) = 0$

$0,16x^3 -2x =0$

$x(0,16x^2 -2) =0$

$x_1=0 \qquad 0,16x^2 -2 =0$

$x^2 = 12,5$

$x_{2/3} = \pm\sqrt{12,5}$

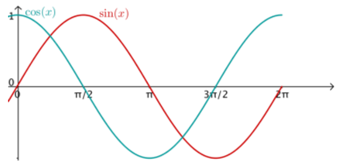
Nun muss noch überprüft werden, an welcher Stelle ein HOP/TIP vorliegt → Vorzeichentabelle

	- √12,5		0	√12,5
x	-	-	+	+
$0{,}16x^2$ -2	+	-	-	+
e'(x)	-	+	-	+

→ Min bei x= $\pm\sqrt{12{,}5}$

minimaler Abstand für d($\pm\sqrt{12{,}5}$) $\sqrt{0{,}04(\sqrt{12{,}5})^4-\left(\sqrt{12{,}5}\right)^2+25}\approx 4{,}3$ m

2) k(x) = 5cos(cx)



Bedingung I: k(x) muss an den Stellen x_1 =-5 und x_2= 5 Nullstellen haben.

5*cos (5c) = 0

cos (5c) =0

Die Kosinusfunktion hat eine Nullstelle für x= π/2 = 0,5π

→ c*5= 0,5π

→c= π/10 = 0,1π → k(x) = 5 cos(0,1π x)

b) Bedingung III bedeutet, dass der Tunnel je drei Meter vom Ursprung entfernt eine Höhe von 4 m haben muss, d.h. p(±3) = 4 und k(±3) =4 muss gelten

p(±3) = -0,2*9+5= 3,2<4

k(±3) = 5 cos(0,1π 3) ≈ 2,93 <4 → Bedingung ist nicht erfüllt.

3a) Begründen Sie, dass in diesem Modell jeder Punkt des Querschnitts der Tunnelwand von der Bodenmitte M den Abstand 5m hat. → Zeige, dass die Funktion einen Halbkreis beschreibt:

f(x) = $\sqrt{25-x^2}$

y = $\sqrt{25-x^2}$

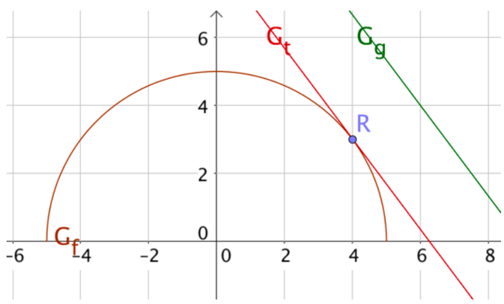
y^2 = 25- x^2

y^2+x^2 = 25 → Alle Punkte (x/f(x)) liegen auf einen Kreis um (0/0) mit Radius 5

Bedingung III f(±3) = $\sqrt{25-(\pm 3)^2}=4$ ✓

d) Steigung der Tangente t von f im Punkt R(4/f(4))

→ f'(x) = $\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ → f'(4) = $-\frac{4}{\sqrt{25-4^2}}=-\frac{4}{3}$



→ Steigungen stimmen überein → Geraden sind parallel

e) 1) Lot l in R zu t

2) Schnittpunkt von l und g → S

3) Abstand von S und R ist gesuchte Länge