Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale 1. Art

sind Integrale, bei denen eine der beiden Integrationsgrenzen den Wert Unendlich hat.

Vorgehen:
1. Man definiert zunächst die „Unendlich-Grenze" als Variable b (=feste Grenze)
2. Man bestimmt das Integral herkömmlich
3. Man überprüft, ob der Grenzwert bestimmbar ist

Schematische Untersuchung:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^k}\,dx \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}, \qquad a > 0$$

a) k = 1

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln(b) - \ln(a)$$

existiert nicht, da ln(b) mit b → ∞ über alle Grenzen wächst.

b) k > 1

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-k}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right]_a^b = \lim_{b\to\infty} \left(\underbrace{\frac{b^{1-k}}{1-k}}_{\to 0} - \frac{a^{1-k}}{1-k}\right) = -\frac{a^{1-k}}{1-k} = \frac{a^{1-k}}{k-1}$$

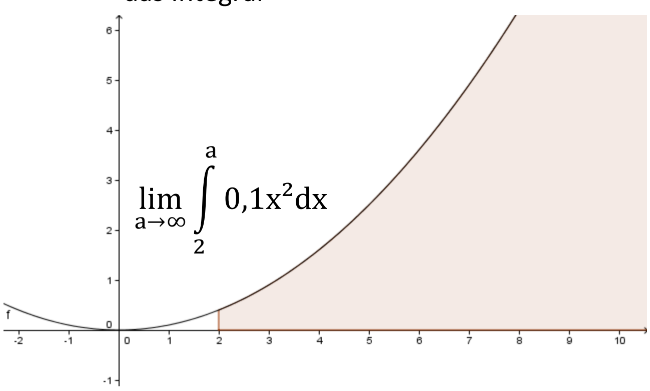
c) k < 1

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-k}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right]_a^b = \lim_{b\to\infty} \left(\underbrace{\frac{b^{1-k}}{1-k}}_{\to \infty} - \frac{a^{1-k}}{1-k}\right)$$

existiert nicht.

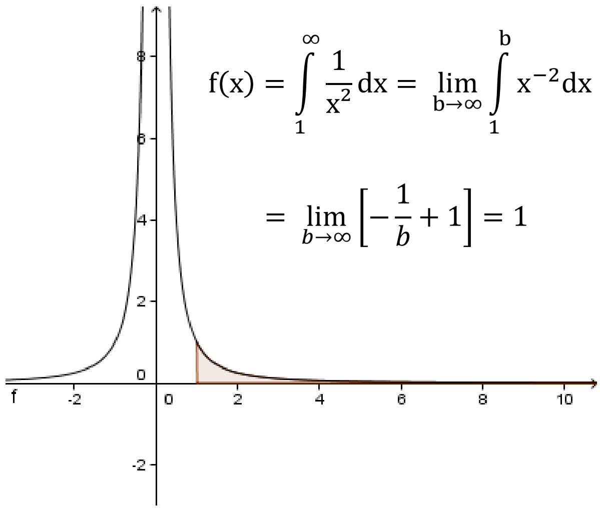
Beispiele:

Die Fläche ist nach rechts unbegrenzt, das Integral



$$\lim_{a\to\infty} \int_2^a 0{,}1x^2\,dx$$

kann nicht existieren.



$$f(x) = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} + 1\right] = 1$$

Uneigentliche Integrale 2. Art

Die Integrandenfunktion ist am **Rand des betreffenden** Intervalls nicht definiert.

Vorgehen: 1. Man definiert die Definitionslücke als Variable a (=feste Grenze, nahe an der Definitionslücke)
2. Man bestimmt das Integral herkömmlich
3. Man überprüft, ob der Grenzwert bestimmbar ist

Schematische Untersuchung:

$$\int_0^b \frac{1}{x^k}\,dx \qquad \text{mit } k \in R, \qquad b > 0$$

a) k = 1

$$\lim_{a\to 0}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0} \ln(b) - \ln(a)$$

existiert nicht, da ln(a) mit a → 0 über alle Grenzen wächst.

b) k > 1

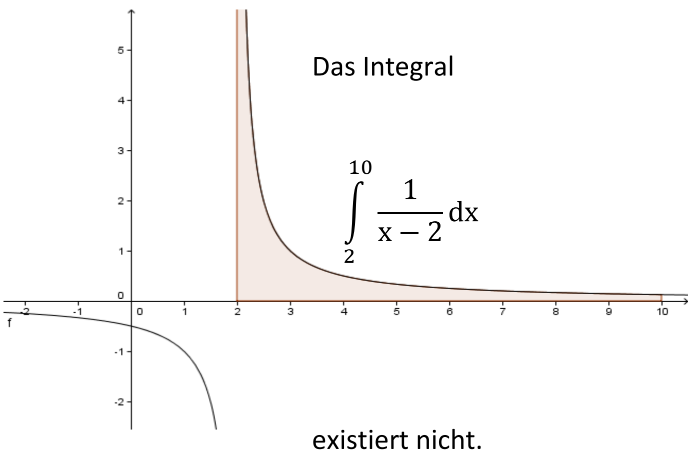
$$\lim_{a\to 0}\int_a^b \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^b x^{-k}\,dx = \lim_{a\to 0}\left[\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right]_a^b = \lim_{a\to 0}\left(\frac{b^{1-k}}{1-k} - \underbrace{\frac{a^{1-k}}{1-k}}_{\to\infty}\right)$$

existiert nicht.

c) 0 < k < 1

$$\lim_{a\to 0}\int_a^b \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^b x^{-k}dx = \lim_{a\to 0}\left[\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right]_a^b = \lim_{a\to 0}\left(\frac{b^{1-k}}{1-k} - \underbrace{\frac{a^{1-k}}{1-k}}_{\to 0}\right) = \frac{b^{1-k}}{1-k}$$

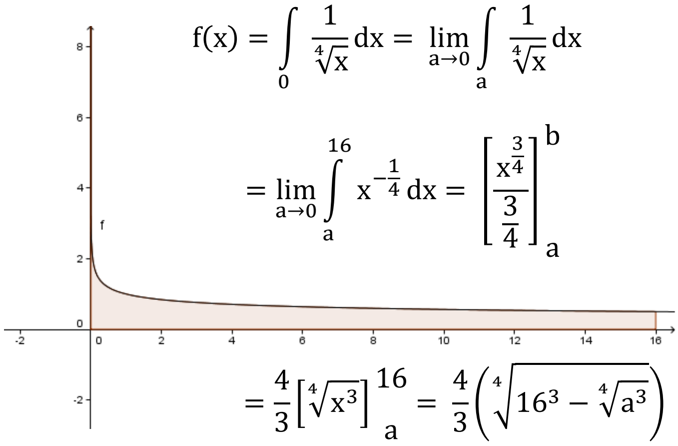
Beispiele:



Das Integral

$$\int_2^{10} \frac{1}{x-2}\,dx$$

existiert nicht.



$$f(x) = \int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$$

$$= \lim_{a\to 0}\int_a^{16} x^{-\frac{1}{4}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}\right]_a^b$$

$$= \frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}\right]_a^{16} = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{16^3 - \sqrt[4]{a^3}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{16^3} = 10\frac{2}{3}$$