BE

IV.

Die Firma VEGAS hat ein neues Gesellschaftsspiel entwickelt, bei dem neben Laplace-Würfeln auch spezielle Vegas-Würfel verwendet werden, die sich äußerlich von den Laplace-Würfeln nicht unterscheiden. Die Vegas-Würfel zeigen die Augenzahl „6“ mit der erhöhten Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, während die anderen Augenzahlen untereinander gleich wahrscheinlich sind.

3 1. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Zufallsgröße „Augenzahl beim einmaligen Werfen eines Vegas-Würfels“ 4 ist.

① Vegas Würfel: $P_{Vegas}(6) = \frac{1}{3}$

$$P_V(1-5) = \frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{15}$$

$$E = \frac{2}{15} \cdot (1+2+3+4+5) + 6 \cdot \frac{1}{3} = 4$$

7 2. Auf dem Tisch liegen ungeordnet drei Laplace-Würfel und ein Vegas-Würfel. Ein Spieler nimmt davon zufällig drei Würfel und wirft sie gleichzeitig.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er drei gleiche Augenzahlen, wenn er drei Laplace-Würfel genommen hat? Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er drei gleiche Augenzahlen, wenn er zwei Laplace-Würfel und den Vegas-Würfel genommen hat?

Welche Folgerung können Sie aus Ihren Ergebnissen bezüglich der stochastischen Abhängigkeit der Ereignisse „Er erzielt drei gleiche Augenzahlen“ und „Er nimmt drei Laplace-Würfel“ ziehen?

(2.) 3 Laplace Würfel:

$$P(\text{Drei gleiche Zahlen}) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$$

2 Laplace & 1 Vegas Würfel:

$$P(\text{Drei gleiche Zahlen}) = \underbrace{5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{2}{15}}_{\text{Zahlen } 1-5} + \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}}_{\text{Zahl } 6} = \frac{1}{36}$$

Da die WS für „drei gleiche Augenzahlen" für 3 Laplace oder 2 Laplace & 1 Vegas Würfel gleich sind, sind die Behauptungen „drei gleiche Augenzahlen" und „3 Laplace Würfel" stochastisch unabhängig.

3. Um bei einem Würfel festzustellen, ob es sich um einen Laplace- oder Vegas-Würfel handelt, wird er 100-mal geworfen. Ein Vegas-Würfel soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % als solcher eingestuft werden.

5 a) Bestimmen Sie hierzu die Entscheidungsregel anhand der Anzahl der geworfenen Sechser so, dass möglichst auch ein Laplace-Würfel richtig eingestuft wird.
[Ergebnis: Entscheidung für Vegas-Würfel ab 23 geworfenen Sechsern]

3. a)

	Annahmebereich	Signifikanzniveau
$P_{Laplace}(\frac{1}{6})$	$\{0; \ldots; k\}$	
$P_{Vegas}(\frac{1}{3})$	$\{k+1; \ldots; 100\}$	$\leq 0{,}01$

$$P^{100}_{1/3}(X < k+1) \leq 0{,}01$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k = 22}} \quad \text{TW!}$$

Ab 23 gewürfelten 6ern kann man davon ausgehen, dass es sich um einen Vegas-Würfel handelt.

$$\Rightarrow \underline{\underline{k = 22}} \quad \text{TW!}$$

3 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei dieser Entscheidungsregel ein Laplace-Würfel falsch eingestuft?

b)

$$P^{100}_{1/6}(X \geq 23)$$

$$= \cancel{P}\ 1 - P^{100}_{1/6}(X \leq 22)$$

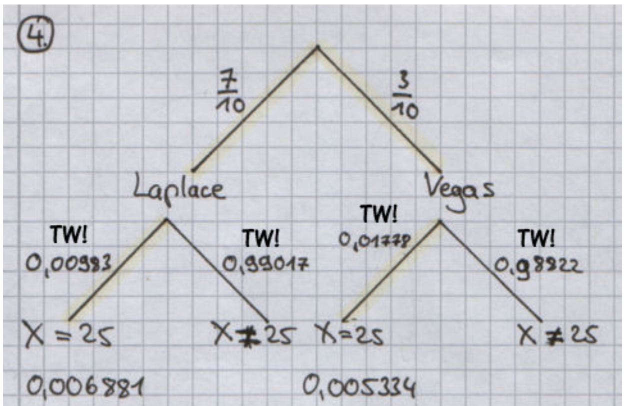
$$= 1 - 0{,}93695 \quad \text{TW!}$$

$$= \underline{\underline{6{,}3\,\%}}$$

Eine Packung des Spiels enthält – ungeordnet und äußerlich nicht unterscheidbar – 7 Laplace- und 3 Vegas-Würfel.

5 4. Aus dieser Packung wird ein Würfel entnommen und 100-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um einen Vegas-Würfel, wenn dabei 25-mal eine „6“ geworfen wird?

④



$P(X=25) = 0{,}006881 + 0{,}005334$

$= 0{,}012215$

$P_{X=25}(\text{Vegas}) = \dfrac{P(\text{Vegas}) \cap P(X=25)}{P(X=25)}$

$= 43{,}7\,\%$

BE

5. Die 10 Würfel werden nun einzeln nacheinander aus der Packung entnommen und je 100-mal geworfen.

4 a) Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der geworfenen Sechser unter den insgesamt 1000 durchzuführenden Würfen. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

[Ergebnis: $E(X) = 216\frac{2}{3}$, $\mathrm{Var}(X) = 163\frac{8}{9}$]

⑤ $E(X)$:

a) $\underbrace{700}_{\text{Anzahl der Laplace Würfel Würfe}} \cdot \frac{1}{6} + \underbrace{300}_{\text{Anzahl der Vegas Würfel Würfe}} \cdot \frac{1}{3} = 216\frac{2}{3}$

$E(X) = 216\frac{2}{3}$

$\mathrm{Var}(X)$:

$700 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + 300 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 163{,}88$

$\mathrm{Var}(X) = 163\frac{8}{9}$

4 b) Die Zufallsgröße X ist näherungsweise normalverteilt. Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei den 1000 Würfen mehr als 225-mal eine „6“ geworfen wird.

b) $P(X > 225)$

$$= 1 - P(X \leq 225)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{225 - 216\frac{2}{3} + 0{,}5}{\sqrt{163\,^{8}/_{9}}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(0{,}69) = \underline{\underline{24{,}5\,\%}}$$

6. Bei einem Spiel werden jeweils 5 Würfel geworfen. Aus den Augenzahlen – aufgefasst als Ziffern – werden möglichst große fünfstellige natürliche Zahlen gebildet, z. B. 43321, nicht jedoch 34312.

4 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine Zahl größer als 50000, wenn es sich um 5 Laplace-Würfel handelt?

5 b) Wie viele verschiedene natürliche Zahlen können nach dieser Spielregel gebildet werden? Wählen Sie aus den folgenden kombinatorischen „Modellen“ zunächst das für dieses Problem passende aus und bestimmen Sie dann mit dessen Hilfe die gesuchte Anzahl.

A) Anzahl der fünfstelligen Zahlen aus den Ziffern 1 bis 6 dividiert durch die Zahl der Permutationen von 5 Elementen

B) Zahl der möglichen Verteilungen von 5 Kugeln auf 6 Urnen, wobei es nur auf die jeweilige Anzahl der Kugeln in den Urnen ankommt

C) Zahl der möglichen Verteilungen von 6 Kugeln auf 5 Urnen, wobei es nur auf die jeweilige Anzahl der Kugeln in den Urnen ankommt

40

b)

Die Urnen stehen für die verschiedenen Augen zahlen und die Kugeln für die gewürfelten Augenzahlen.

$\Rightarrow$ Modell B ist richtig!

5 mal Ziehen o. Z $= \binom{k+n-1}{k} = \binom{6+5-1}{5} = \underline{\underline{252}}$