28.9.2009 S. 161/12
Daniel Greb

$$f(x) = \frac{-x^3+6x^2-9x}{(x-1)^2} \; ; \; D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

---

a.) Nullstellen: $-x^3+6x^2-9x = 0;$

$x(x^2-6x+9) = 0;$

doppelte Nullstelle

$x_1 = 0; \quad x_2 = 3 \quad \Rightarrow \underline{\underline{NS_1(0|0); \; NS_2(3|0)}}$

---

b.) zunächst: Art d. Definitionslücke:

$f(x) = \frac{-x\cdot(x-3)^2}{(x-1)^2} \quad \rightarrow \underline{\underline{x_0 = 1 \text{ ist Polstelle gerader Ordnung}}}$

$\rightarrow 4^+$

$\Rightarrow$ jetzt: Grenzwert an $x_0 = 1$:

$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} \frac{\underbrace{-(1+h)}_{\rightarrow -1^+}\cdot\overbrace{(h-2)}^{\rightarrow -2^+}{}^2 \Big\} \underline{\underline{-4}}^{+}}{\underbrace{h^2}_{\rightarrow \underline{\underline{0^+}}}} = \underline{\underline{-\infty}}$$

$\lim_{h\to 0} f(1-h) = \underline{\underline{-\infty}}$ (Polstelle gerader Ordnung)

---

c.) Polynomdivision:

$$(-x^3+6x^2-9x) : (x^2-2x+1) = \underline{\underline{-x+4-\frac{4}{x^2-2x+1}}} \stackrel{!}{=} (x-1)^2$$

⋮

q.e.d.

---

d.) Welche Asymptote?

$\lim_{|x|\to\infty} \frac{-x^3+6x^2-9x}{x^2-2x+1} \stackrel{!}{=} \pm\infty \rightarrow G_f$ besitzt schiefe Asymptote $\underline{\underline{a(x) = -x+4}}$

$\rightarrow$ Begründung: $\underline{\underline{\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-a(x)]}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4}{\underbrace{(x-1)}_{\rightarrow\pm\infty}{}^2 \Big\} \rightarrow +\infty} \stackrel{!}{=} \underline{\underline{0}}$

q.e.d.

Es muss gelten: $g(x) = a(x) - f(x) > 0$; für alle $x \in D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\rightarrow \underline{\underline{g(x) = +\frac{4}{(x-1)^2 \big\} > 0}}} > 0$ für alle $x \in D_f$

q.e.d.

---

e.) 1. lokales Max.: $f'(x) = \frac{-x^3+3x^2-3x+9}{(x-1)^3} = \frac{-(x-3)\cdot(x^2+3)}{(x-1)^3}$

$\rightarrow f'(3) \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ waagrechte Tangente an G_f in $x_0 = 3$

jetzt: 2 Möglichkeiten:

entweder

I.) Grenzwert d. Steigung v. f an $x_0 = 3$:

von links:

$\lim\limits_{h \to 0} f'(3-h) = \underline{\underline{0^+}}$ (NS ungerader Ord. d. 1. Ableitung)

von rechts:

$$\lim_{h \to 0} f'(3+h) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{-h}^{\to 0^-} \cdot \overbrace{[\underbrace{(3+h)^2}_{\to 9^+} + 3]}^{\to 12^+}}{\underbrace{(2+h)^3}_{\to 8^+}} \Rightarrow \text{Zähler}: \underline{\underline{\to 0^-}} = \underline{\underline{0^-}}$$

$\to$ in $x_0 = 3$ geht G_f von Steigen in Fallen über

$\Rightarrow$ <u>lokales Max. (3|0)</u>

q.e.d.

oder

II.) Betrachten d. Monotonieverhaltens v. f:

	(Polstelle →) 1		3	
Faktoren: $-(x^2+3)$		$-$		$-$
$x-3$		$-$		$+$
$x-1$		$+$		$+$
$\Rightarrow$ VZ $f'(x)$		$+$		$-$
G_f		↗	lokales Max. (3|0)	↘

q.e.d.

2.) keine weiteren Extrema:

$f'(x) = 0$

$\to -(x-3) \cdot \underbrace{(x^2+3)}_{\geq 3} = 0;$

$\to x = 3$

$\to$ waagrechte Tangente nur in $x_0 = 3$

$\Rightarrow$ <u>keine weiteren Extrema</u>

q.e.d.

---

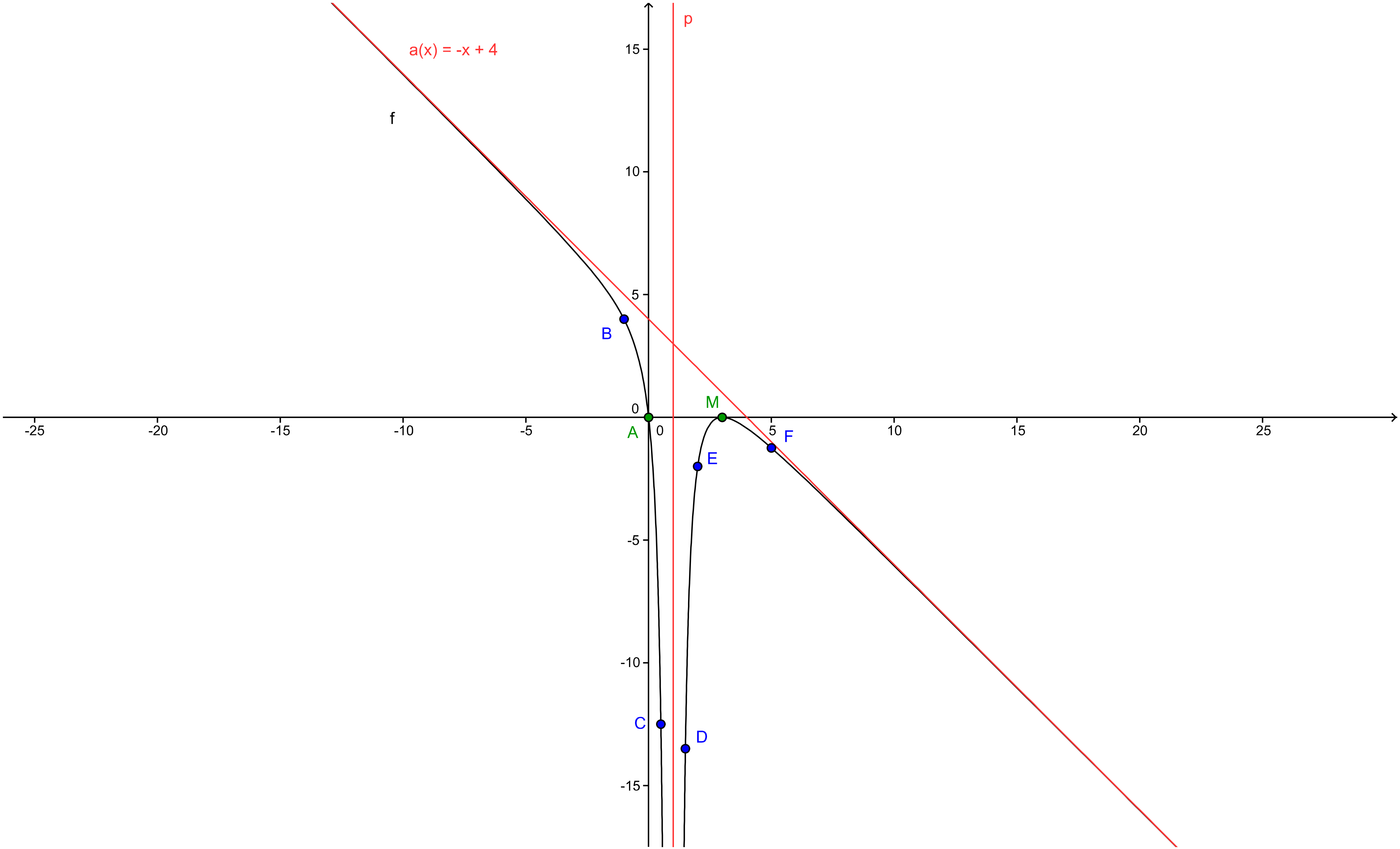
f) $f(-1) = 4$ (Punkt B)

$f(\frac{1}{2}) = -12{,}5$ (C)

$f(\frac{3}{2}) = -13{,}5$ (D)

$f(2) = -2$ (E)

$f(5) = -1{,}25$ (F)


a(x) = -x + 4
p
f
15
10
5
0
-5
-10
-15
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25
A
B
C
D
E
F
M