C7 Übung Funktionen gemischt

1. Gib eine Funktion an, die folgende Eigenschaften besitzt:
   (1) Die Nullstellen liegen bei $x=\frac{\pi k}{2}$ $k \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{D}=[-2;2]$
   (2) Zwei Nullstellen liegen bei $x_1=-1$, $x_2=2$ und der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
   (3) Der Graph der Funktion steigt streng monoton für alle $x \in \mathbb{R}$, ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
   (4) Der Graph der Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, schneidet diese aber nicht.

2. Gib zwei verschiedene Beispiele von Funktionen f an, die folgende Eigenschaften haben:
   (1) f(1) = 0 und f(2) = 1
   (2) f(0) = 1 und f(2) = 4
   (3) G_f fällt für alle $x \in \mathbb{R}$ und hat die x-Achse als Asymptote

3. Gib jeweils drei verschiedene Funktionen an,
   (1) die bei x=2 eine Nullstelle besitzen.
   (2) deren Graphen sich nicht schneiden.
   (3) mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

4. Wahr oder falsch? Begründe richtige Aussagen und widerlege falsche Aussagen durch ein Gegenbeispiel.

a) Eine ganzrationale Funktion vom Grad drei hat immer drei Nullstellen.
b) Eine ganzrationale Funktion vom Grad drei hat mindestens eine Nullstelle.
c) Für ganzrationale, ungerade Funktionen gilt: $\mathbb{W}=\mathbb{R}$.
d) Bei gebrochen rationalen Funktionen muss die Null immer aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.

C7 Übung Funktionen gemischt

Dies sind nur Beispiele. Du kannst deine Lösungen von 1.-3. mit Hilfe von GeoGebra überprüfen.

1.z.B.
(1) $f(x) = 2\sin(2x)$
(2) $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x+2) = (x^2-1)(x^2-4)$
(3) $f(x) = x^3$
(4) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2.
(1) z.B. $f(x)=x-1$ Kontrolle $f(1)=1-1=0$ ✓ $f(2)=2-1=1$ ✓
$f(x)=(x-1)^2$ Kontrolle $f(1)=(1-1)^2=0$ ✓ $f(2)=(2-1)^2=1$ ✓
(2) z.B. $f(x)=1{,}5x+1$ $f(x)=0{,}75x^2+1$ $f(x)=0{,}375x^3+1$
$f(x)=2^x$
(3) z.B. $f(x) = 0{,}5^x$
$f(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$
$f(x) = \frac{1}{x}$

3. z.B.
(1) $f(x) = x-2$ $f(x) = (x-2)^2$ $f(x)=x^2-4$ $f(x)=\frac{x-2}{x}$ $f(x)=\sin(\pi x)$
(2) $f(x) = x$ $f(x) = x+1$ $f(x) = x+2$
(3) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $f(x) = \frac{1}{2x-4}$ $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$

4.
a) Falsch, Gegenbeispiel: $f(x)=x^3$ ist vom Grad 3 und hat genau eine Nullstelle
Eine ganzrationale Funktion vom Grad drei hat maximal drei Nullstellen.
b) Wahr. Betrachte den charakteristischen Verlauf, denn entweder gilt:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$
oder: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ → G_f schneidet mind. einmal die x-Achse
c) Wahr. Begründung s. b) Grenzwerte
d) Falsch. z.B. $f(x)=\frac{2}{x-2}$, $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ → 0 ist in $\mathbb{D}$ enthalten