Regiomontanus - Gymnasium Haßfurt - Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 10

Wissen und Können	Aufgaben, Beispiele, Erläuterungen

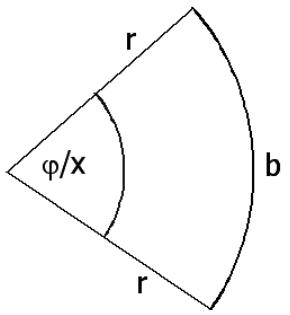
1. Berechnungen am Kreis

Bogenmaß

Das Bogenmaß x ist das zu φ gehörende Verhältnis

$\frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$,

also die Zahl $x = \frac{b}{r} = \frac{\pi}{180°} \cdot \varphi$



Umrechnungen:

φ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	2π

Das Verhältnis $\frac{b}{r}$ ist bei vorgegebenem Winkel φ konstant und nur von φ abhängig.

Leicht zu merken: $\frac{\varphi}{360°} = \frac{b}{2r\pi}$ (*)

Das Bogenmaß x ist die Bogenlänge b im Einheitskreis (Kreis mit Radius 1). Mit r = 1 ergibt sich aus (*):

$$\frac{\varphi}{360°} = \frac{x}{2\pi}$$

Kreisteile

Sektorfläche: $A = \frac{r^2\pi}{360°} \cdot \varphi$ bzw. $A = \frac{r}{2} \cdot b$

Bestimme den Flächeninhalt eines Viertelkreises mit einem Radius von 5,0 cm.

Lösung: $A = 0{,}25 \cdot (5{,}0\ \text{cm})^2 \cdot \pi = 20\ \text{cm}^2$

Kugel

Volumen: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$

Oberflächeninhalt: $O = 4r^2\pi$

Der Oberflächeninhalt einer Kugel beträgt 6,2 m^2. Berechne ihren Radius und ihr Volumen.

Lösung: $O = 4r^2\pi \Rightarrow r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}} = \sqrt{\frac{6{,}2m^2}{4\pi}} = 0{,}70\ \text{m}$

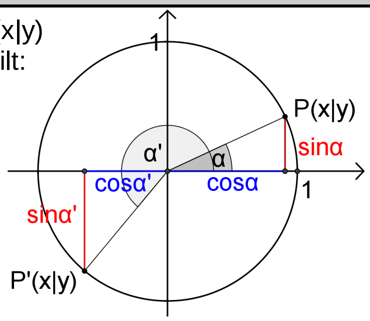
$V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}(0{,}70\text{m})^3\pi = 1{,}5\ \text{m}^3$

2. Sinus und Kosinus am Einheitskreis

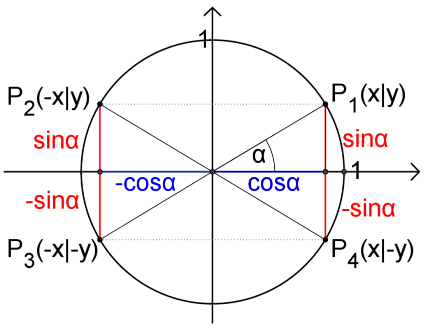
Für beliebige Punkte P(x|y) auf dem Einheitskreis gilt:

x = cos α

y = sin α



Für die Winkel 180° - α, 180° + α und 360° - α haben die Sinus- und Kosinuswerte den gleichen Betrag wie der spitze Winkel α; die Vorzeichen ergeben sich aus der Lage auf dem Einheitskreis.



Weiter gilt: sin(-α) = - sin α; cos(-α) = cos α

wichtige Werte:

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Daraus folgt z. B. auch:

$\sin 150° = \sin(180° - 150°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Bestimme alle Winkel, für die gilt: $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

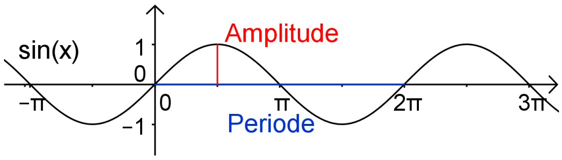
Lösung:

$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \alpha_1 = 45°;\ \alpha_2 = 180° - 45° = 135°$

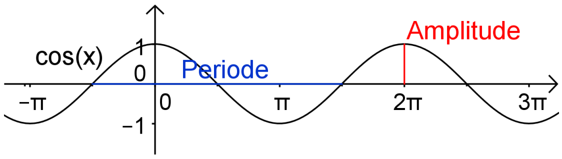
Beachte: Der Taschenrechner liefert nur *eine* Lösung!

3. Trigonometrische Funktionen

Eine Funktion der Form $f : x \mapsto \sin(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ heißt **Sinusfunktion**.
Der Graph ist punktsymmetrisch zu (0|0).

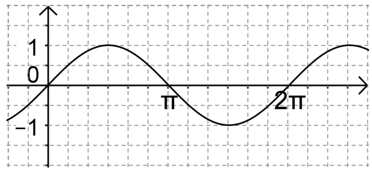


Eine Funktion der Form $f : x \mapsto \cos(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ heißt **Kosinusfunktion**.
Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.



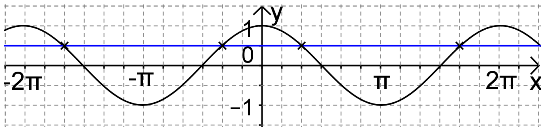
Für beide Funktionen gilt:
Die Periodenlänge ist 2π, die Amplitude 1, die Wertemenge $\mathbb{W}_f = [-1;1]$.

Die Graphen lassen sich leichter zeichnen, wenn man für die x-Achse folgende Skalierung wählt: $\pi \triangleq 3$ cm



Bestimme anhand des Funktionsgraphen alle $x \in [-2\pi; 2\pi]$, für die gilt: $\cos(x) = \frac{1}{2}$

Lösung:



$$x = -\frac{5\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$$

Eine Funktion der Form $f : x \mapsto a \sin[b(x + c)] + d$ mit $a, b \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt **allgemeine Sinusfunktion**.

Zusammenhang mit dem Graph der Sinusfunktion, Bedeutung der Parameter

a: Streckung ($|a| > 1$) oder Stauchung ($0 < |a| < 1$) in y-Richtung; $a < 0$: Spiegelung an der x-Achse
b: Streckung ($0 < |b| < 1$) oder Stauchung ($|b| > 1$) in x-Richtung; $b < 0$: Spiegelung an der y-Achse
c: Verschiebung nach rechts ($c < 0$) oder links ($c > 0$)
d: Verschiebung nach oben ($d > 0$) oder unten ($d < 0$)

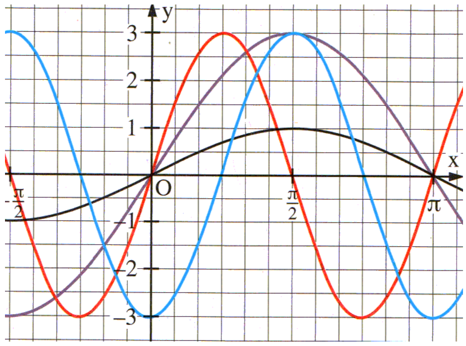
Weiter gilt:

Amplitude: a

Wertemenge: $\mathbb{W} = [-|a| + d; |a| - d]$

Periodenlänge: $\frac{2 \cdot \pi}{|b|}$

Gib zu den vier Graphen jeweils einen passenden Funktionsterm an!



Lösung: schwarzer Graph: z. B. sin(x)
violetter Graph: z. B. 3sin(x)
roter Graph: z. B. 3sin(2x)
blauer Graph: z. B. –3cos(2x)

4. Exponentialfunktionen und Logarithmen

Lineares Wachstum

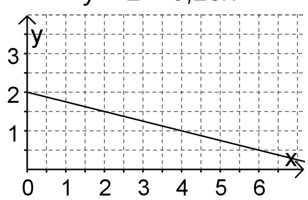
$y = c + a \cdot x$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}^+$)

c heißt Anfangswert, a beschreibt die Abnahme bzw. den Zuwachs.

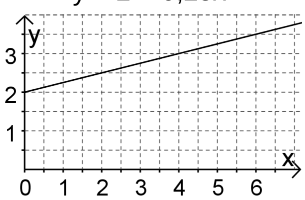
<u>Erkennungszeichen:</u>

Die *Differenz* aufeinander folgender Werte ist konstant.

Abnahme ($a < 0$)
$y = 2 – 0{,}25x$



Zuwachs ($a > 0$)
$y = 2 + 0{,}25x$



Exponentielles Wachstum

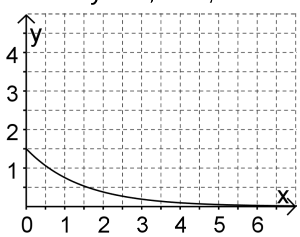
$y = c \cdot a^x$ ($a, c \in \mathbb{R}^+$; $a \neq 1$)

c heißt Anfangswert, a beschreibt den Wachstumsfaktor.

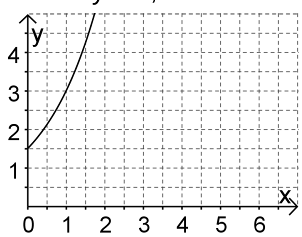
<u>Erkennungszeichen:</u>

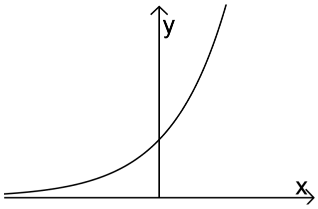
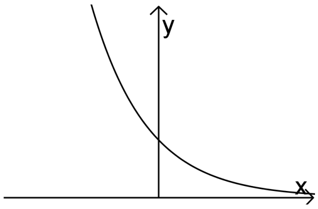
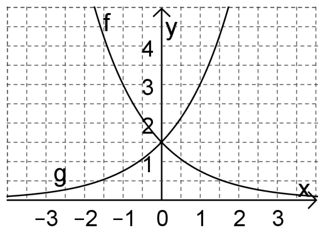
Der *Quotient* aufeinander folgender Werte ist konstant.

Abnahme ($0 < a < 1$)
$y = 1{,}5 \cdot 0{,}5^x$



Zunahme ($a > 1$)
$y = 1{,}5 \cdot 2^x$



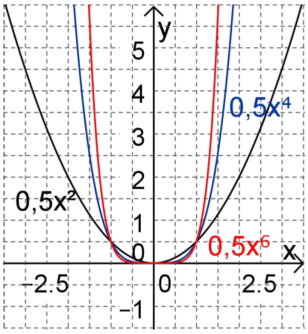
Eine Funktion der Form $f: x \mapsto c \cdot a^x$ mit $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$; $a \neq 1$; $c \in \mathbb{R}$) heißt **Exponentialfunktion.** c heißt der Anfangswert der Funktion; a beschreibt den Wachstumsfaktor. Es gilt: - $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ - $f(0) = c$ - Asymptote: x-Achse  $a > 1$, $c > 0$: Graph steigt  $0 < a < 1$, $c > 0$: Graph fällt	Zeichne für $f: x \mapsto 1{,}5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ und $g: x \mapsto 1{,}5 \cdot 2^x$ jeweils den Graphen der Funktion. Was fällt auf? *Lösung:*  Man erhält den Graphen von g durch Spiegelung des Graphen von f an der y-Achse und umgekehrt.
Der **Logarithmus von b zur Basis a**, kurz **$\log_a b$**, ist diejenige Hochzahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten; d.h. er löst die Exponentialgleichung $a^x = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$; $a \neq 1$ durch $x = \log_a b$.	$2^3 = 8 \Leftrightarrow 3 = \log_2 8$
Rechenregeln für Logarithmen $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ $\log(a^r) = r \cdot \log(a)$ **Basiswechsel**: $\log_c(a) = \frac{\log_b(a)}{\log_b(c)}$	$\log(6) = \log(2 \cdot 3) = \log(2) + \log(3)$ $\log(5) = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log(10) - \log(2)$ $\log(125) = \log(5^3) = 3 \cdot \log(5)$ $\log_2(20) = \frac{\log_{10}(20)}{\log_{10}(2)}$
Exponentialgleichungen sind Gleichungen, in denen die Lösungsvariable x im Exponenten auftritt. Exponentialgleichungen löst man durch beidseitiges Logarithmieren. Die Basis des Logarithmus ist dabei beliebig.	$2^x = 3^{2x-1}$; $5^{x+1} = 125$ Bestimme die Lösung der Gleichung. *Lösung:* $3^{x-2} = 5$ $\log_2(3^{x-2}) = \log_2(5)$ $(x-2) \cdot \log_2(3) = \log_2(5)$ $x - 2 = \frac{\log_2(5)}{\log_2(3)}$ $x = \frac{\log_2(5)}{\log_2(3)} + 2$

5. Ganzrationale Funktionen

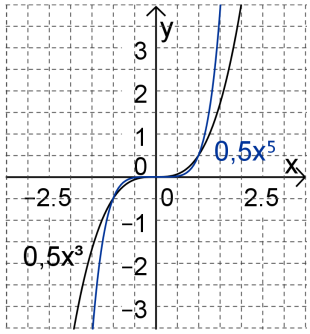
Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

Eine Funktion der Form $f: x \mapsto a \cdot x^n$ mit $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ heißt **Potenzfunktion n-ten Grades.**

Den Graph einer Potenzfunktion mit einem natürlichen Exponenten nennt man Parabel n-ter Ordnung.



n gerade



n ungerade

Ganzrationale Funktion

Ein Term der Form $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ mit $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ heißt **Polynom** n-ten Grades.

Eine Funktion, die ein Polynom n-ten Grades als Funktionsterm hat, heißt **ganzrationale Funktion** n-ten Grades.

$f(x) = x + 2$ (Grad 1)
$f(x) = x^2 + 5x - 1$ (Grad 2)
$f(x) = 2x^3 - x^4 + 3x - 6$ (Grad 4)
$f(x) = 5x^{10} - 10x^5 + 5$ (Grad 10)

Nullstellen

Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Ist x_0 eine Nullstelle der ganzrationalen Funktion f mit $f: x \mapsto a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$, so gilt:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x),$$

wobei g eine ganzrationale Funktion vom Grad n - 1 ist. Den Term $(x - x_0)$ nennt man Linearfaktor.

Die Funktion g erhält man z.B. durch Polynomdivision.

Polynomdivision:

$(6x^3) : (3x) =$

$$\begin{array}{l}
(6x^3 + 16x^2 - 7x - 10) : (3x + 2) = \boxed{2x^2} + \boxed{4x} - 5 \\
-(6x^3 + 4x^2) \qquad \leftarrow (3x+2) \cdot 2x^2 \\
\quad 12x^2 - 7x \qquad \rightarrow (12x^2) : (3x) = \\
\quad -(12x^2 + 8x) \\
\qquad -15x - 10 \\
\qquad -(-15x - 10) \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

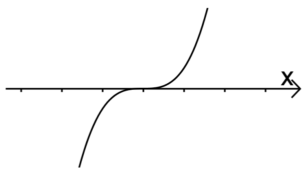
usw.

d.h. $6x^3 + 16x^2 - 7x - 10 = (3x + 2) \cdot (2x^2 + 4x - 5)$

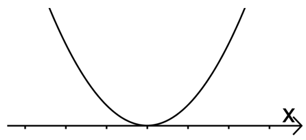
Mehrfache Nullstellen

Gilt $f(x) = (x - x_0)^r \cdot h(x)$, wobei f vom Grad n, h vom Grad n – r und $h(x_0) \neq 0$ ist, so hat f bei x_0 eine r-fache Nullstelle.

Ist r gerade, so berührt der Graph dort die x-Achse, bei ungeradem r schneidet er sie. Für $r > 1$ hat der Graph dort eine waagrechte Tangente.



r ungerade, $r \neq 1$



r gerade

Berechnung der Nullstellen

n = 2: Lösungsformel für quadratische Gleichungen

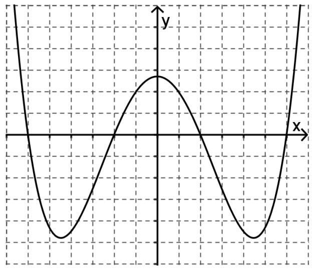
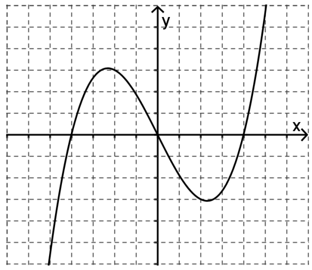
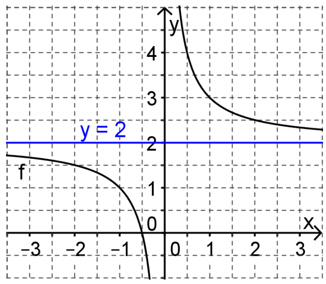
n = 3: Eine Nullstelle x_0 wird durch Probieren ermittelt oder ist durch die Aufgabenstellung gegeben; anschließend wird der Funktionsterm durch $x - x_0$ dividiert. Mit dem neuen Term werden die weiteren Nullstellen berechnet.

n > 3: Mehrfaches Vorgehen wie für n = 3

Bestimme die Nullstellen der Funktion $f: x \mapsto x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Lösung:

- leicht zu erkennen: $f(1) = 0$, d.h. $x_1 = 1$ ist Nullstelle
- Durch Polynomdivision ergibt sich:
  $f(x) = (x - 1)(x^2 - x - 2)$
- Die Lösungsformel angewandt auf $x^2 - x - 2$ liefert die Nullstellen $x_2 = 2$ und $x_3 = -1$.

6. Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen	
Maximale Definitionsmenge Sie wird durch den Funktionsterm bestimmt.	Einschränkungen ergeben sich z. B. bei Bruchtermen (Nenner nie Null) oder bei Wurzeltermen (Radikand nicht negativ)
Symmetrie zum Koordinatensystem $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow G_f$ ist symmetrisch zur y-Achse $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow G_f$ ist symmetrisch zum Punkt $(0 \vert 0)$	$f(-x) = f(x)$  $f(-x) = -f(x)$ 
Nullstellen sind die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse. Man erhält sie durch Lösen der Gleichung f(x) = 0.	Quadratische Gleichung: Lösungsformel Exponentialgleichung: Logarithmieren Ganzrationale Funktionen: siehe oben
Schnittpunkt mit der y-Achse Einsetzen von x = 0 in die Funktionsgleichung	Koordinaten des Schnittpunkts $S_y(0 \vert y_S)$ mit $y_S = f(0)$
Verhalten im Unendlichen - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$ bedeutet, dass der Funktionswert f(x) genügend nahe an der Geraden mit der Gleichung y = a liegt, wenn man x genügend groß bzw. klein wählt. Der Graph hat dann y = a als **horizontale Asymptote.** - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$ - Vorgehen bei gebrochen rationalen Funktionen: Betrachte die jeweils höchste Potenz des Zähler- und Nennerpolynoms.	$f(x) = \frac{1}{x} + 2$ horizontale Asymptote: y = 2  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1-x^3}{2x^3-5x^2+3x} =$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-x^3(-\overset{\to 0}{\frac{1}{x^3}}+1)}{2x^3(1-\underset{\to 0}{\frac{5}{2x}}+\frac{3}{2x^2})} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-x^3}{2x^3} = -\frac{1}{2}$
Einfluss von Parametern - g(x) = f(x) + d Verschiebung in y-Richtung um d - g(x) = f(x + c) Verschiebung in x-Richtung um (- c) - g(x) = f(b · x), b > 0 Streckung (b < 1) bzw. Stauchung (b > 1) in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ - g(x) = f(- x) Spiegelung an der y-Achse - g(x) = a · f(x), a > 0 Streckung (a > 1) bzw. Stauchung (a < 1) in y-Richtung mit dem Faktor a - g(x) = - f(x) Spiegelung an der x-Achse	f(x) = sin(x) - g(x) = sin(x) + 5 Verschiebung in y-Richtung um +5 - $g(x) = \sin(3x+\pi/2) = \sin[3(x + \pi/6)]$ Verschiebung in x-Richtung um $-\pi/6$ und Stauchung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ - g(x) = sin(2x) Stauchung in x-Richtung mit dem Faktor 0,5 - g(x) = sin(-x) Spiegelung an der y-Achse - g(x) = 3sin(x) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3 - g(x) = - sin(x) Spiegelung an der x-Achse

7. Vierfeldertafeln und bedingte Wahrscheinlichkeit

Vierfeldertafel

Der Ergebnisraum kann durch zwei Ereignisse A und B in vier Teilmengen zerlegt werden. Die Anzahlen von Elementen einer Teilmenge oder deren Wahrscheinlichkeiten können in einer Vierfeldertafel veranschaulicht werden.

Vierfeldertafel mit Anzahlen:

	A	$\overline{A}$	
B	$\lvert A\cap B\rvert$	$\lvert \overline{A}\cap B\rvert$	$\lvert B\rvert$
$\overline{B}$	$\lvert A\cap \overline{B}\rvert$	$\lvert \overline{A}\cap \overline{B}\rvert$	$\lvert \overline{B}\rvert$
	$\lvert A\rvert$	$\lvert \overline{A}\rvert$	$\lvert \Omega\rvert$

Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten:

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	100%

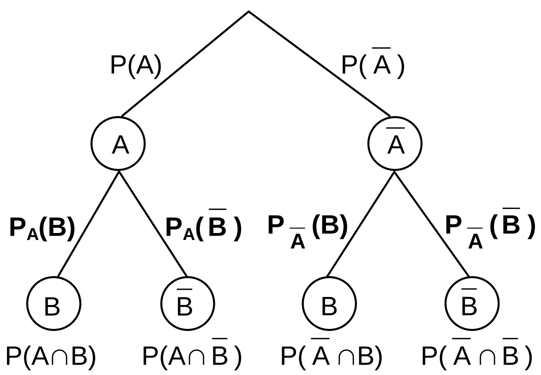
Mit den Werten der Vierfeldertafel lassen sich leicht Baumdiagramme erstellen. Die jeweilige Fragestellung gibt vor, welches der beiden Ereignisse die erste Stufe des Baumdiagramms bildet.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Als bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses B unter der Bedingung, dass ein Ereignisses A desselben Zufallsexperiments bereits eingetreten ist.

Falls $P(A) \neq 0$ gilt: $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

An Baumdiagrammen lassen sich bedingte Wahrscheinlichkeiten direkt ablesen.



Im Lehrerkollegium einer Schule werden die Merkmale M: „Männlich" und R: „Raucher" betrachtet. 60% der Lehrer sind männlich, 6% der Lehrer rauchen und sind männlich, 80% der Kollegen sind Nichtraucher.

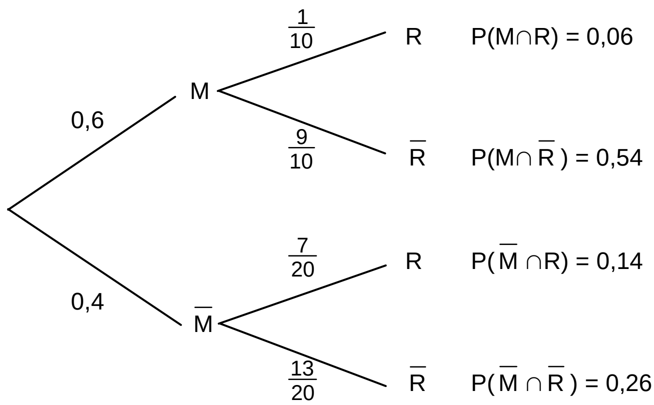
1. Erstelle eine zugehörige Vierfeldertafel.
2. Erstelle ein zu der Vierfeldertafel passendes Baumdiagramm, das alle Wahrscheinlichkeiten enthält.
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Lehrer Raucher?
4. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Lehrer Nichtraucher und weiblich?
5. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Lehrer männlich, wenn man weiß, dass er Raucher ist?

Lösung:

1: vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel

	R	$\overline{R}$	
M	**0,06**	0,54	**0,6**
$\overline{M}$	0,14	0,26	0,4
	0,2	**0,8**	1

2: Baumdiagramm (beginnend mit dem Ereignis M)



3: $P(R) = 0{,}2 = 20\%$ (siehe Vierfeldertafel)

4: $P(\overline{R}\cap \overline{M}) = 0{,}26 = 26\%$

5: $P_R(M) = \dfrac{P(M\cap R)}{P(R)} = \dfrac{6\%}{20\%} = 0{,}3 = 30\%$