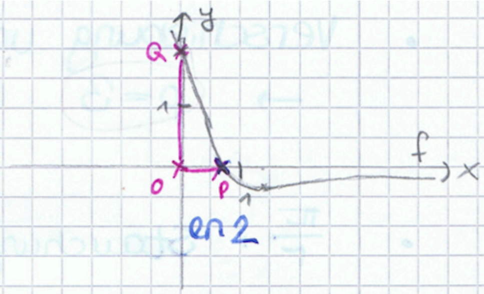
Teil B:



$f(x) = 2 \cdot e^{-x} \cdot (2e^{-x} - 1)$

Nullstelle: $x = \ln 2$

1a) $f'(x) = 2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) \cdot (2e^{-x} - 1) + 2 \cdot e^{-x} \cdot 2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) =$

Produkt-regel

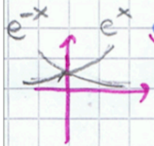
$= -2 \cdot e^{-x} \cdot (2e^{-x} - 1) - 4 \cdot e^{-x-x}$

$= -4e^{-2x} + 2e^{-x} - 4e^{-2x}$

$= -8e^{-2x} + 2e^{-x}$ ✓

$= 2e^{-x}(-4e^{-x} + 1) = 2e^{-x} \cdot (1 - 4e^{-x})$

1b) $f'(x) = 0$ Extrema



$\underbrace{2 \cdot e^{-x}}_{>0} \cdot \underbrace{(1 - 4e^{-x})} = 0$

$1 = 4e^{-x}$

$\frac{1}{4} = e^{-x}$

$-\ln 0{,}25 = x$

$-\ln \frac{1}{4} = \ln 4 = x$

VZW prüfen!

		$\ln 4$	
$2 \cdot e^{-x}$	+		+
$1 - 4e^{-x}$	−		+
$f'(x)$	−		+
f	↘	TIP	↗

in $f(x)$:

$f(\ln 4) = 2 \cdot e^{-\ln 4} \cdot (2e^{-\ln 4} - 1)$

$= -0{,}25 \Rightarrow TIP(\ln 4 | -\frac{1}{4})$

Teil B – 1c)

$F(x) = 2\cdot e^{-x} - 2e^{-2x}$

$F'(x) = 2\cdot e^{-x}\cdot(-1) - 2e^{-2x}\cdot(-2)$

$= -2e^{-x} + 4e^{-2x} = 2e^{-x}(-1+2e^{-x})$

$= 2e^{-x}(2e^{-x}-1)$

$= f(x)$ ✓

→ F Stammfunktion von f!

$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\underbrace{2e^{\overbrace{-x}^{\to -\infty}}}_{\to 0}}_{\to 0} - \underbrace{\underbrace{2\cdot e^{\underbrace{-2x}_{\to -\infty}}}_{\to 0}}_{\to 0} = 0$

1d) • F verläuft durch $(\ln 2 \mid 0{,}5)$

→ siehe Graph zu 1a)

f ≙ Ableitung von F

Für $x < \ln 2$: G_f verläuft oberhalb x-Achse

Für $x > \ln 2$: G_f verläuft unterhalb d. x-Achse

d.h. für $x = \ln 2$ VZW von + nach – bei f

↳ F steigt bis $x = \ln 2$ und sinkt für $x > \ln 2$.

→ abs. HOP $(\ln 2 \mid 0{,}5)$

Höchster Wert $x = \ln 2$ (HOP) bei G_F, da $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$ (steigt nicht mehr!)

• $x = \ln 4$ Wendestelle: Wendepunkt von F ≙ Extrema von f

⟹ f hat Extrema bei $x = \ln 4$ → WP von F

$x = \ln 4$ in f

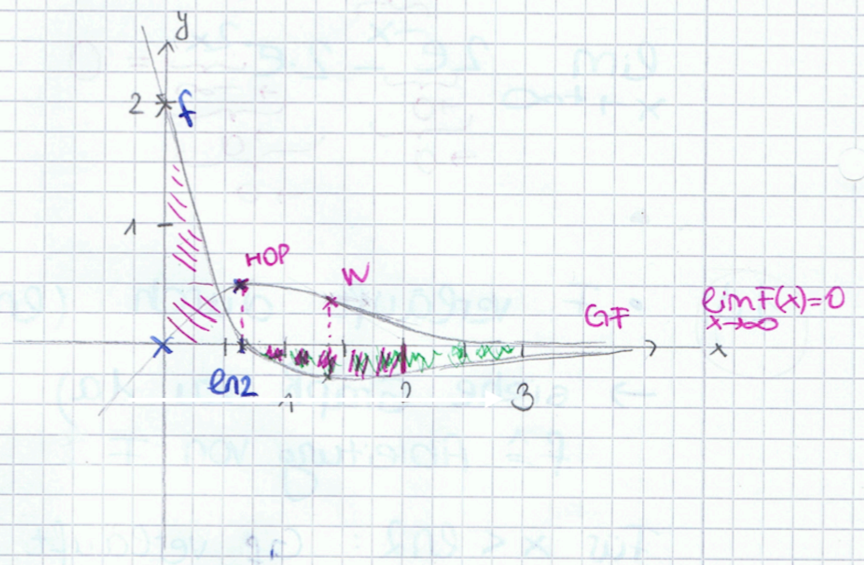
$$F(\ln 4) = 2 \cdot e^{-\ln 4} - 2 \cdot e^{-2 \cdot \ln 4}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot e^{\ln(4^{-2})}$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \underline{\frac{3}{8}}$$

$WP\left(\ln 4 \,\middle|\, \frac{3}{8}\right)$

e)



$$F(0) = 2 \cdot e^0 - 2 \cdot e^0 = 0$$

f) Dreieck siehe Zeichnung zu 1a)

① $A_{OPQ} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln 2 = \ln 2$

$$A = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx = [F(x)]_0^{\ln 2} = \left[2e^{-x} - 2e^{-2x}\right]_0^{\ln 2} =$$

$$1 - \frac{1}{2} - [2 - 2] = \frac{1}{2}$$

Abweichung: $\frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{0{,}5} \approx 0{,}386 = \underline{38{,}6\%}$

Teil B – 1g)

- $F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \left[2e^{-x} - 2e^{-2x}\right]_0^x =$

  $2e^{-x} - 2e^{-2x} - (2-2) = 2e^{-x} - 2e^{-2x} = F(x)$

  oder:

  $F_0(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$ (HDI: Nullstelle an unterer Grenze)

  $F(0) = 0$ $\rightarrow$ $F_0(0) = F(0)$

  $F_0(x) = F(x)$

- $F_0(2) \approx 0{,}234$

  ↳ Flächenbilanz: Inhalt der Fläche zwischen G_f und x-Achse für $x \in [0;2]$

  → Fläche oberh. d. x-Achse positiv gewertet

  → " unterh. d. x-Achse negativ gewertet

  → $\underbrace{0{,}5}_{\text{8 Kästchen in der Zeichnung von 16}} - \underbrace{0{,}25}_{\text{4 von 16}} = 0{,}25 \approx F_0(2)$

  16 Kästchen = 1 Flächeneinheit

1h) keine Integralfunktion, also keine Nullstelle

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$

F hat HOP (ln2 | 0,5)

↳ um mehr 0,5 in y-Richtung verschieben

z.B. $F_{-1}(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x} - 2$

2a) x in 6 min ... B-Teil

$B(2) = e^{-4} \approx \underline{1{,}8\%}$

$F(2) = 2 \cdot e^{-2} - 2e^{-4} = 0{,}234... \approx \underline{23{,}4\%}$

$P(2) = 1 - e^{-4} - 0{,}234 = 0{,}748 = \underline{74{,}8\%}$

2b) $F(x) \rightarrow$ HOP gesucht

Extrema von $F \hat{=}$ Nullstelle von f

$x = \ln 2$ (VZW von + nach −)

↳ HOP

Einheit $\hat{=}$ 6 min

$6 \text{min} \cdot \ln 2 \approx 4{,}159 \text{ min}$

$4{,}159 (\text{min}) \cdot 60 \approx 250$ Sekunden

Nach 250 Sekunden ist der Anteil der Ti-Kerne am größten!

2c) $B(0) = e^{-2 \cdot 0} = e^0 = 1 = 100\%$

$B(x) + F(x) + P(x) = 1$, da nur diese drei Atomkerne (durch Umwandeln) sich im Gefäß befinden.

$B(x) = F(x) = P(x) = \frac{1}{3}$

$B(x) = \frac{1}{3}$

$e^{-2x} = \frac{1}{3} \quad | \ln$

$-2x = \ln \frac{1}{3}$

$x = -0{,}5 \cdot \ln \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \cdot \ln 3^{-1} = \frac{\ln 3}{2}$

2c)

$x = \frac{\ln 3}{2}$ in $F(x)$

$$F\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = 2 \cdot e^{-\frac{\ln 3}{2}} - 2 \cdot e^{-2 \cdot \frac{\ln 3}{2}} \approx 0{,}49 \neq \frac{1}{3}$$

$\lightning$

→ Zu keinem Zeitpunkt gilt $B(x) = F(x) = P(x) = \frac{1}{3}$. → Anteile der drei Kernsorten zu keinem Zeitpunkt gleich groß!

2d)

$$\lim_{x \to \infty} \Big(\underbrace{1}_{1} - \underbrace{e^{\overset{\to -\infty}{-2x}}}_{0} - \underbrace{2e^{\overset{\to -\infty}{-x}}}_{0} + \underbrace{2e^{\overset{\to -\infty}{-2x}}}_{0} \Big) = 1 - 0 = 1$$

Zu einem späteren Zeitpunkt sind nur noch Pb-Kerne im Gefäß (100%).