BE

IV.

1. Im Januar 2002 war in einer Zeitung zu lesen, dass die neuen Euro-Münzen keine Laplace-Münzen seien. Bei einem Experiment mit einer 2-Euro-Münze, die man 1000-mal auf dem Tisch kreiseln ließ, sei 600-mal Zahl oben liegen geblieben.

3 a) Zeigen Sie, dass bereits bei 200 Würfen einer Laplace-Münze die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in wenigstens 60 % der Fälle Zahl oben liegen bleibt, kleiner als 0,5 % ist.

1 a) $0{,}6 \cdot 200 = 120$

$$P^{200}_{0,5}(X \geq 120)$$

$$1 - P^{200}_{0,5}(X \leq 119)$$

$$= 1 - \underbrace{0{,}99716}_{\text{TW!}} = 0{,}00284$$

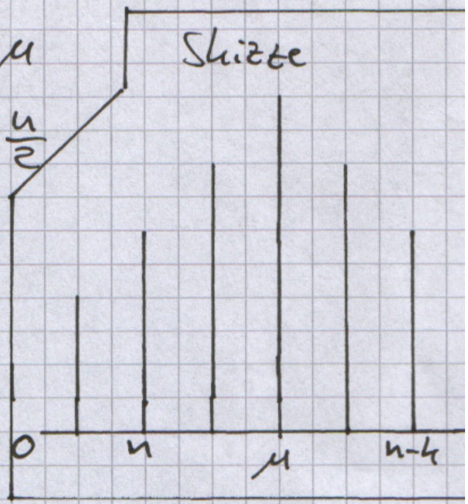
$0{,}284\,\% < 0{,}5\,\%$ ✓

4 b) Begründen Sie, dass die Stabdiagramme der Binomialverteilungen mit p = 0,5 achsensymmetrisch sind. Geben Sie die Symmetrieachse an.

b) $p = q = 0{,}5$

$n \cdot p = \mu \qquad n \cdot q = \mu$

$\mu = \frac{n}{2} \qquad \mu = \frac{n}{2}$



TW: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Symmetrieachse: $\frac{n}{2}$

6 c) Ermitteln Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow eine möglichst kleine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, bei 1000 Würfen einer Laplace-Münze wenigstens 600-mal Zahl zu erhalten. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe 1a und nehmen Sie dazu kurz Stellung.

c) $P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{Var(x)}{c^2}$

$P(|X - 500| \geq 100) \leq \frac{250}{(100)^2}$

$P(|X - 500| \geq 100) \leq 0{,}025$

$\frac{1}{2} \cdot 0{,}025 = 0{,}0125$ (Wegen der Symmetr
man braucht nur den
Teil ≥ 600, nicht ≤ 4

Das Ergebnis ist nicht so genau wie bei 1a, da der Tschebyschow nur eine grobe Abschätz liefert.

5 d) Aufgrund des Zeitungsartikels führte ein Schüler eine eigene Versuchsreihe durch. Er ließ eine 2-Euro-Münze 250-mal auf dem Tisch kreiseln; dabei blieb 139-mal Zahl oben.
Stellen Sie durch Näherung mit der Normalverteilung fest, ob dieses Ergebnis auf einem Niveau von 5 % signifikant dafür ist, dass bei dieser Münze häufiger Zahl oben liegen bleibt als bei einer Laplace-Münze.

d)

	Annahme	Signifikanz
$p = 0{,}5$	$\{0; \ldots ; k\}$	5%
$p > 0{,}5$	$\{k+1; \ldots ; 250\}$	

$$P_{0,5}^{250}(X > k) \leq 0{,}05$$

$$1 - P_{0,5}^{250}(X \leq k) \leq 0{,}05$$

$$1 - \phi\left(\frac{k - 125 + 0{,}5}{\sqrt{62{,}5}}\right) \leq 0{,}05$$

$$\phi\left(\frac{k - 124{,}5}{\sqrt{62{,}5}}\right) \geq 0{,}95$$

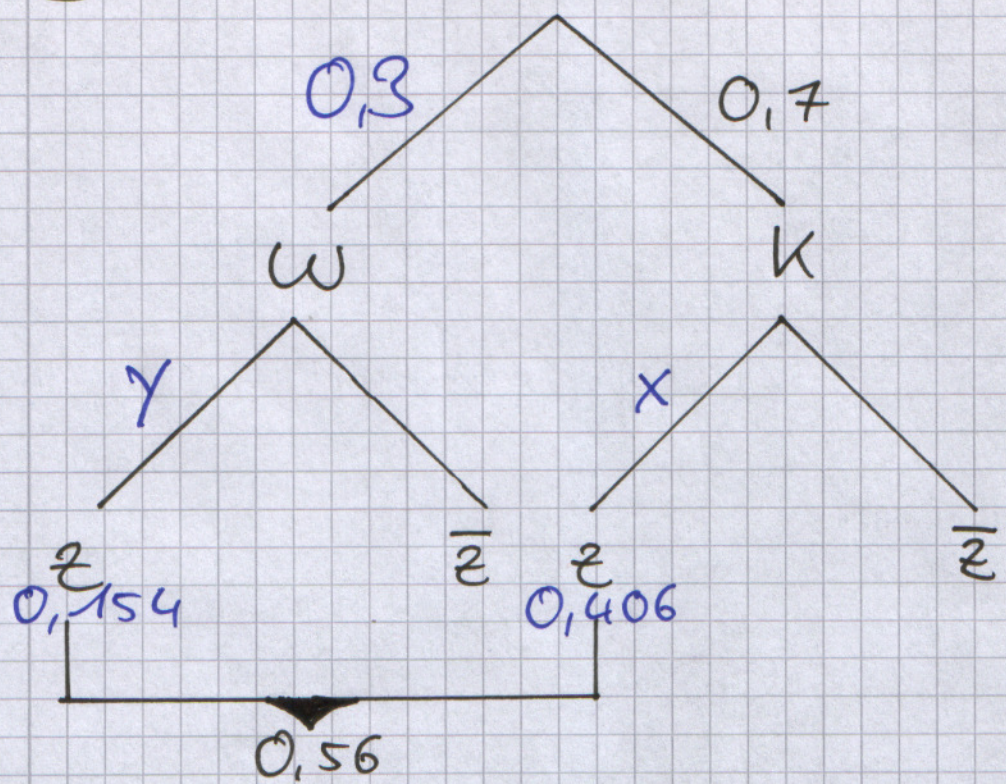
$$\frac{k - 124{,}5}{\sqrt{62{,}5}} \geq 1{,}645$$

$$k \geq 137{,}5$$

Bei einem Ergebnis von 139 (siehe Aufgabe wird es auf dem Signifikanzniveau von 5% abgelehnt, dass es eine Laplace Münze ist.

6 2. Auf dem Schulfest des Laplace-Gymnasiums wurde untersucht, welchen Einfluss es hat, ob eine 2-Euro-Münze geworfen oder auf dem Tisch gekreiselt wird. Jeder Schüler durfte selbst entscheiden, ob er lieber werfen oder kreiseln wollte. In der Schülerzeitung war anschließend Folgendes zu lesen:
"70 % der Schüler kreiselten die Münze. Insgesamt ist in 56 % aller Fälle Zahl oben liegen geblieben, wobei davon 72,5 % durch Kreiseln erzielt worden sind."
Wie groß ist die relative Häufigkeit des Ereignisses „Zahl liegt oben" beim Werfen und wie groß ist sie beim Kreiseln?

2.



$P(\text{Zahl} \cap \text{Kreiseln}) = 0{,}56 \cdot 0{,}725 = 0{,}406$

$P(\text{Zahl} \cap \text{Werfen}) = 0{,}56 - 0{,}406 = 0{,}154$

$P_{\text{Kreiseln}}(\text{Zahl}) \Rightarrow 0{,}7\,x = 0{,}406$

$x = \underline{\underline{0{,}58}}$

$P_{\text{Werfen}}(\text{Zahl}) \Rightarrow 0{,}3\,y = 0{,}154$

$y = \underline{\underline{0{,}513}}$

BE

3. Eine Laplace-Münze wird so oft geworfen, bis zweimal hintereinander die gleiche Seite oben liegen bleibt. Insgesamt wird aber höchstens n-mal geworfen. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Würfe, $E_n(X)$ sei ihr Erwartungswert.

2 a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei n-maligem Werfen immer abwechselnd beide Seiten zu erhalten?

3. a)

$P(KZKZ\ldots) + P(ZKZK\ldots)$

$= 2 \cdot 0{,}5^n = \underbrace{2 \cdot 0{,}5}_{=1} \cdot 0{,}5^{n-1} = 0{,}5^{n-1}$

6 b) Bestimmen Sie $E_2(X)$, $E_3(X)$ und $E_4(X)$.

b) $n=2$ $\Omega\ \{ZZ; KK; ZK; KZ\}$

$E_2(X) = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}5^2 = \underline{\underline{2}}$

$n=3$ $\Omega\ \{ZZ; KK; ZKK; KZZ; ZKZ; KZK\}$

$E_3(X) = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5^2 + 4 \cdot 3 \cdot 0{,}5^3 = \underline{\underline{2{,}5}}$

$n=4$ $\Omega\ \{ZZ; KK; ZKK; KZZ; ZKZZ; KZKK; ZKZK; KZKZ\}$

$E_4(x) = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}5^3 + 4 \cdot 4 \cdot 0{,}5^4 = \underline{\underline{2{,}}}$

4 c) Zeigen Sie, dass gilt: $E_{n+1}(X) - E_n(X) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) aus Teilaufgabe b):

$E_n(X) = 2\cdot 2\cdot 0{,}5^2 + 2\cdot 3\cdot 0{,}5^3 + 2\cdot 4\cdot 0{,}5^4 + \dots + 4\cdot n\cdot 0{,}5^n$

somit:

$E_{n+1}(x) = 2\cdot 2\cdot 0{,}5^n + 2\cdot 3\cdot 0{,}5^3 + 2\cdot 4\cdot 0{,}5^4 + \dots + 2\cdot n\cdot 0{,}5^n + 4(n+1)\cdot 0{,}$

$E_{n+1}(x) - E_n(x) = 2\cdot n\cdot 0{,}5^n + 4(n+1)0{,}5^{n+1} - 4n\cdot 0{,}5^n$

$= 2n\cdot 0{,}5^n + 4n\cdot 0{,}5^{n+1} + 4\cdot 0{,}5^{n+1} - 4n\cdot 0$

$= 2n\cdot 0{,}5^n + 2n\cdot 0{,}5^n + 4\cdot 0{,}5^{n+1} - 4n\cdot 0{,}$

$= 4\cdot 0{,}5^{n+1}$

$= 0{,}5^{n-1}$

4 d) Erläutern Sie, warum $E_n(X)$ für $n \to +\infty$ nicht größer als 3 wird, und interpretieren Sie diese Tatsache im vorliegenden Zufallsexperiment.

d) $E_2(x) = 2$

$E_3(x) = 2 + 0{,}5^1$

$E_4(x) = 2 + 0{,}5^1 + 0{,}5^1$

$\vdots$

$E_n(x) = 2 + \sum_{i=1}^{n-2} 0{,}5^i$

da $\lim\limits_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n-2} 0{,}5^i = 1$ (FS „geometrische Reihe" $S_n = 0{,}5\cdot\frac{0{,}5^n-1}{0{,}5-1}$)

folgt $\lim\limits_{x\to\infty} E_n(x) = 3$

Man muss durchschnittlich dreimal werf

bis zweimal hintereinander die gleiche Se

oben liegt.