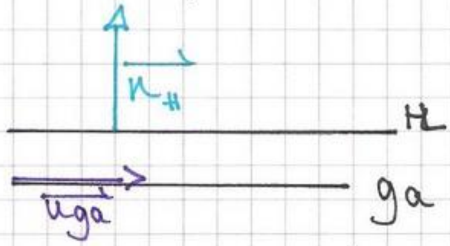
Lösung: Geometrie 2003 V

Nr 1

$H: x_1 + x_2 + x_3 - 8 = 0$

$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix} \quad \lambda, a \in \mathbb{R}$

a) Skizze:



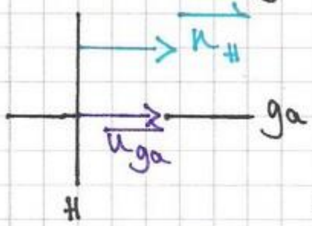
- Wenn $g_a \parallel H$, gilt also: $\vec{u_{ga}} \perp \vec{n_H}$

$u_{ga} \circ n_H \stackrel{?}{=} 0$

$\begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3a - 3a + 8 = 8 \neq 0$

$\Rightarrow$ H und g_a sind nicht parallel!

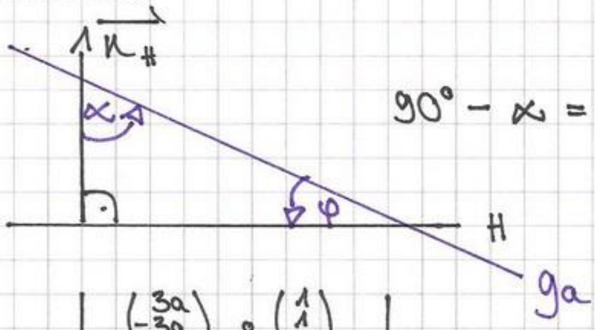
- Wenn $g_a \perp H$, gilt $\vec{u_{ga}} \parallel \vec{n_H}$



$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3a} \\ \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3a} \\ \Rightarrow \lambda = 8 \end{matrix}\right\} \lightning$

$\Rightarrow$ H und g_a stehen nie senkrecht aufeinander!

b) Skizze:



$90° - \alpha = \varphi$

$\cos\alpha = \left| \dfrac{\begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{18a^2 + 64} \cdot \sqrt{3}} \right| = \sin\varphi$

φ wird maximal, wenn $\sin\varphi$ maximal wird (da $0 \leq \varphi \leq 90°$), also wenn $\sqrt{18a^2+64}$ und damit $18a^2+64$ minimal wird.
Das ist der Fall für $a=0$.

$$g_0: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\sin\varphi_{Max} = \left| \frac{8 \cdot 1}{\sqrt{64} \cdot \sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow \varphi_{Max} = 35{,}3°$$

c) $g_a \cap H$

$$(a^2+3a\lambda) + (-3a\lambda) + (-a^2+8\lambda) - 8 = 0$$

$$8\lambda - 8 = 0$$

$$\rightarrow \lambda = 1 \quad \cap \; g_a$$

$$\rightarrow S_a\,(a^2+3a \mid -3a \mid -a^2+8)$$

d) $$|\overrightarrow{OS_a}| = \sqrt{(a^2+3a)^2+(-3a)^2+(8-a^2)^2}$$

$$= \sqrt{a^4+6a^3+9a^2+9a^2+64-16a^2+a^4}$$

$$= \sqrt{2a^4+6a^3+2a^2+64}$$

$|\overrightarrow{OS_a}|$ soll minimal werden

$$\rightarrow f(a) = 2a^4+6a^3+2a^2+64$$

$$f'(a) = 8a^3+18a^2+4a$$

$$= 2a\,(4a^2+9a+\cancel{4}\,2)$$

$f'(a) = 0 \rightarrow$ • $2a = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

• $4a^2+9a+\cancel{4}2 = 0$

$$a_{2,3} = \frac{-9 \pm \sqrt{81-4\cdot 4\cdot 2}}{2\cdot 4} = \frac{-9 \pm 7}{8}$$

$$\rightarrow a_2 = -0{,}25 \; ; \; a_3 = -2$$

1. Möglichkeit: 2. Ableitung

$f''(a) = 24a^2 + 36a + 4$

- $f''(0) = 4 > 0 \rightarrow$ Minimum
- $f''(-\frac{1}{4}) = -3{,}5 < 0 \rightarrow$ Maximum
- $f''(-2) = 28 > 0 \rightarrow$ Minimum

$\left.\begin{array}{l} f(0) = 64 \\ f(-2) = 56 \end{array}\right\} f(-2) < f(0)$

$\rightarrow$ -2 ist der gesuchte Wert für a $\rightarrow S_a$

$\Rightarrow S_{Min}(-2|6|4)$

2. Möglichkeit: Vorzeichentabelle

	$a<-2$	$-2<a<-0{,}25$	$-0{,}25<a<0$	$a>0$
$2a$	−	−	−	+
$4a^2+9a+2$	+	−	+	+
$f'(a)$	−	+	−	+
G_f	fällt	steigt	fällt	steigt

Min in $a=-2$ Max in $a=-\frac{1}{4}$ Min in $a=0$

$\left.\begin{array}{l} f(0) = 64 \\ f(-2) = 56 \end{array}\right\} f(-2) < f(0)$

$\rightarrow$ -2 ist der gesuchte Wert für a $\rightarrow S_a$

$\rightarrow S_{min}(-2|6|4)$

e) Da die Kurve parallel zur x_3-Achse in die x_1x_2-Ebene projeziert wird, sind nur x_1 und x_2 Werte zu beachten!

$S_a(a^2+3a\,|\,-3a\,|\,8-a^2)$

I $x_1 = a^2 + 3a$

II $x_2 = -3a \rightarrow a = -\dfrac{x_2}{3} \rightarrow$ I

$\rightarrow$ I' $x_1 = \left(-\dfrac{x_2}{3}\right)^2 + 3\cdot\left(-\dfrac{x_2}{3}\right) = \dfrac{x_2^2}{9} - x_2$

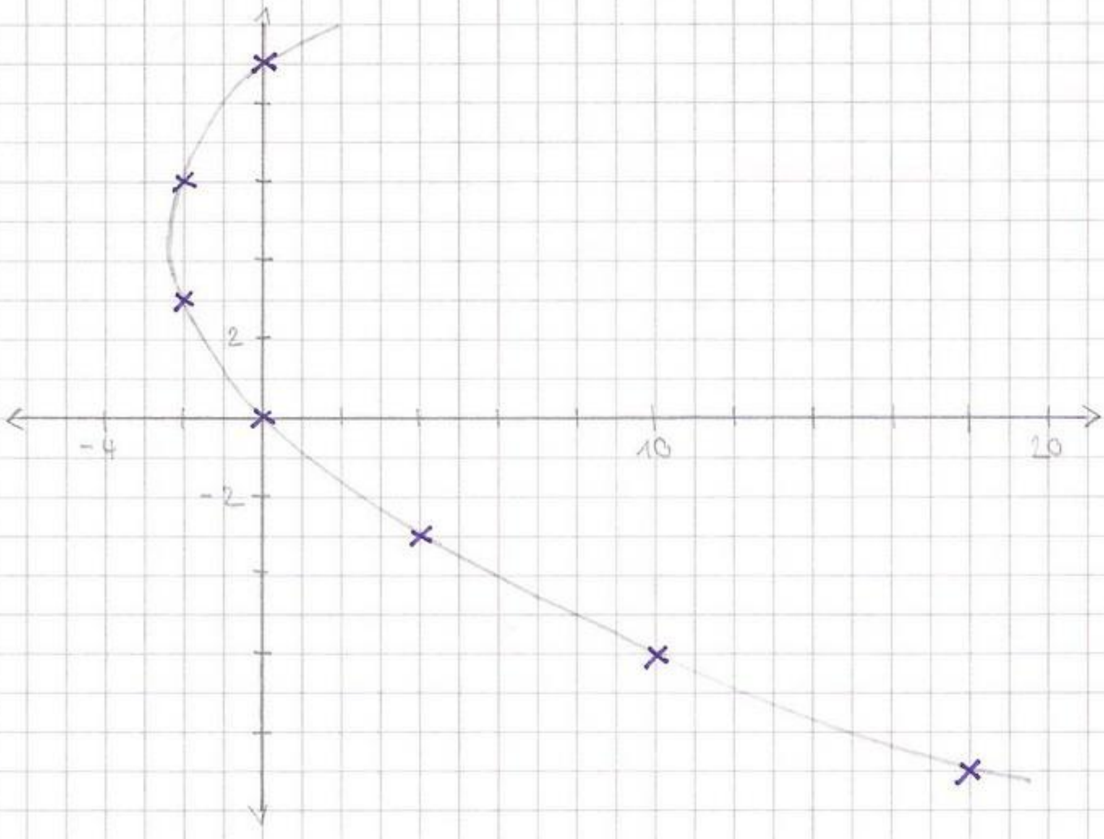
Es gilt also:

$$a = -\frac{x_2}{3} \quad ; \; x_2 = -3a \quad ; \; x_1 = \frac{x_2^2}{9} - x^2$$

Es handelt sich um eine Parabel, da:

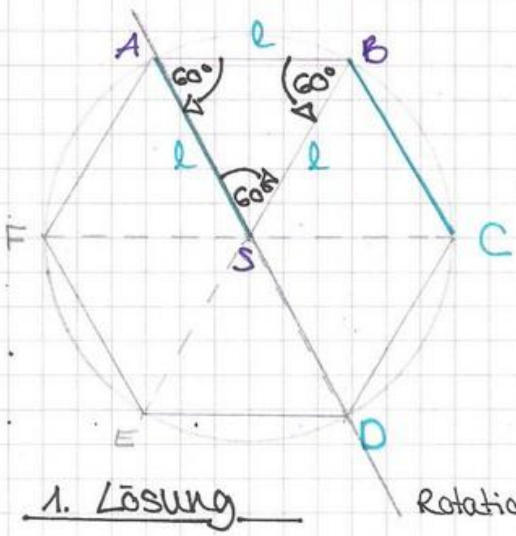
$$x_1 = \frac{1}{9}x_2^2 - x^2$$

a	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x_1	0	-2	-2	0	4	10	18	28
x_2	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12



Nr 2

Reguläres 6eck :



$A(1|6|1)$

$B(-2|9|1)$

a) Bedingungen:

$\overline{AB} = \overline{AS} = \overline{BS}$

oder:

$\overline{AS} = \overline{BS}$ & $\sphericalangle ASB = 90°$

1. Lösung

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{AS}| = \left|\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{2} \quad ; |\overrightarrow{BS}| = \left|\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ A, B und S lassen sich zu einem regulären 6eck ergänzen.

2. Lösung

$|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{BS}| = 3\sqrt{2}$ (siehe 1. Lsg)

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AS} \circ \overrightarrow{BS}}{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{3\cdot 3}{18} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \varphi = 60°$

$$\vec{d} = \vec{a} + 2\cdot(\vec{s} - \vec{a}) = \begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\6\\7\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow D(-5|6|7)$

$$\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}-2\\9\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\9\\4\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow C(-5|9|4)$

b) Durch Rotation entsteht ein Zylinder aus BCEF und 2 aufgesetzten Kegeln aus FAB und ECD.

Kleinste Kugel: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right]^2 = 18$

$|\overrightarrow{SC}| = \sqrt{56}$ (siehe Nr 1d)

$\hookrightarrow > \sqrt{18}$ also: $|\overrightarrow{SC}| > r$

$\rightarrow$ Der Ursprung liegt NICHT innerhalb des Rotationskörpers.