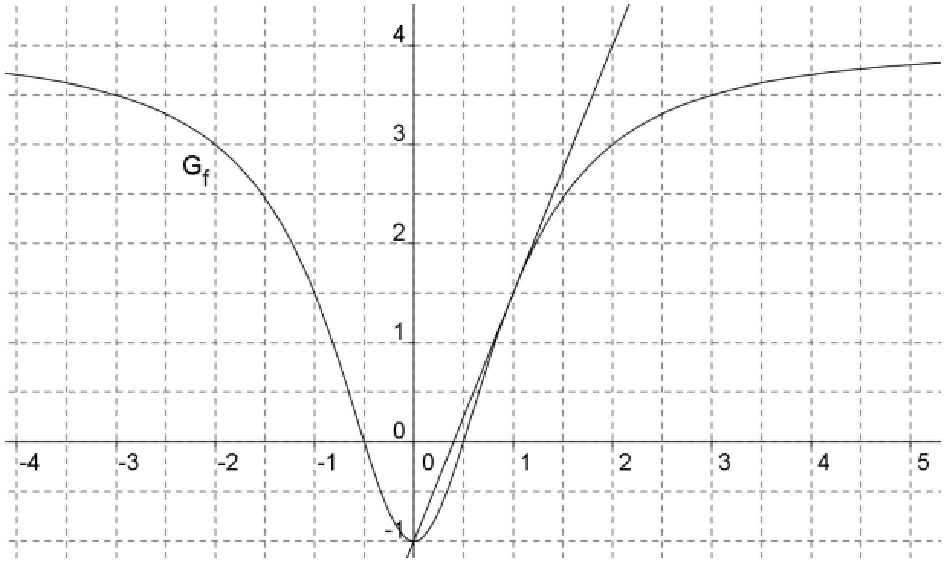
Mathe Q11 - Vorbereitung auf die 1. Klausur

Aufgabe 1

Gegeben ist der Graph der Funktion f mit der Tangente t an der Stelle $x_0 = 1$. G_f hat bei y = 4 eine waagrechte Asymptote.



a) **Begründen** Sie kurz, ob die folgenden Aussagen über die Stammfunktion F richtig oder falsch sind:
   i. Der Graph von F hat an der Stelle x = - 0,5 ein relatives Minimum.
   ii. Die Tangente an den Graphen von F hat an der Stelle x = -1 die Steigung 1,5.

b) Geben Sie zwei Punkte an durch die der Graph von f' sicher verläuft.

c) Geben Sie den folgenden Grenzwert an und **begründen** Sie ihre Entscheidung: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x)$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 6}{x^2 - 9}$.

a. Geben Sie die maximale Definitionsmenge von f an.
b. Berechnen Sie die Nullstellen von f.
c. Untersuchen Sie f auf Symmetrie.
d. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f an den Definitionslücken und im Unendlichen und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von f an.
e. Ermitteln Sie die Monotonieintervalle und die Lage und Art des Extremums von f. (Zur Kontrolle: $f'(x) = \dfrac{42x}{(x^2 - 9)^2}$)
f. Skizzieren Sie den Graphen von f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse. (Platzbedarf: 8cm in alle Richtungen)

Aufgabe 3

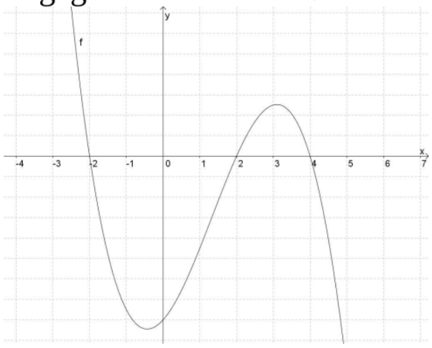
An einem sonnigen Wintertag in Bamberg wurde alle zwei Stunden die Lufttemperatur gemessen. Das Ergebnis finden Sie in der Tabelle rechts.

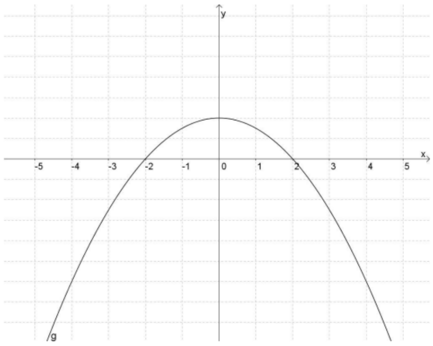
Uhrzeit	Temperatur in °C
8	- 2
10	2
12	5
14	6
16	5
18	3
20	1

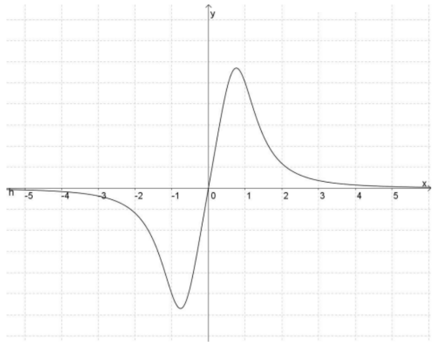
a) Berechnen Sie die mittlere Temperaturänderung im Zeitintervall [14; 20].
b) Was bedeutet ein positives, was ein negatives Vorzeichen der Temperaturveränderung?

Aufgabe 4

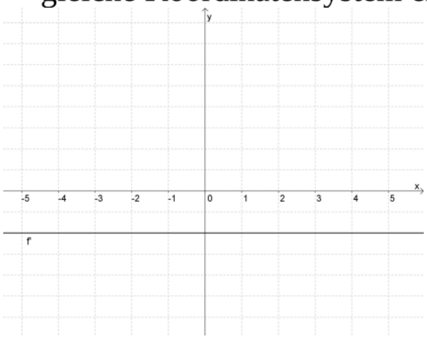
a) Skizzieren Sie jeweils in das existierende Koordinatensystem den Graph der Ableitungsfunktion zur gegebenen Funktion!

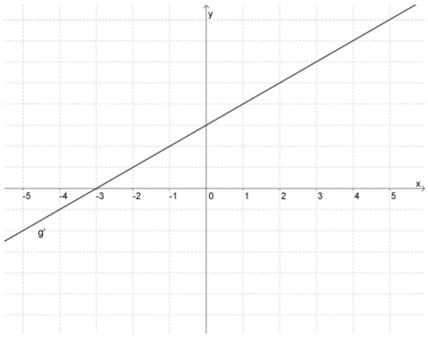


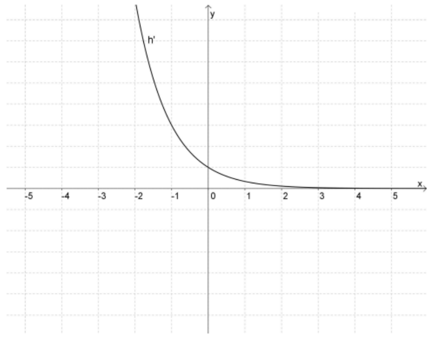




b) Skizzieren Sie jeweils den Graphen einer möglichen Stammfunktion zur gegebenen Funktion in das gleiche Koordinatensystem ein!







Aufgabe 5

Die Funktion f: x $\mapsto \dfrac{1}{x}$ besitzt im Punkt P (1 | 1) die Tangente t.

a) Zeige rechnerisch, dass für diese Gerade t folgende Gleichung gilt: y = 2 - x

Die Funktion f besitzt eine weitere Tangente h, die parallel zur Gerade t verläuft.

b) Zeige rechnerisch, dass diese Gerade h den Graphen von f im Punkt Q (-1 | -1) schneidet.

Die Normale n im Punkt P verläuft senkrecht zu den Geraden t und h.

c) Bestimme die Zuordnungsvorschrift der zugehörigen Funktion n.

d) Bestimme rechnerisch, wie weit die beiden Parallelen t und h von einander entfernt sind.

Aufgabe 6

Es soll eine gebrochenrationale Funktion k gefunden werden, deren Graph die x-Achse bei x = 2 schneidet und Asymptoten mit den Gleichungen x = 1 und y = 0,5 x + 1 besitzt.

a) Begründe jeweils kurz, warum die beiden folgenden Funktionen hierfür nicht in Frage kommen:

k_1: x $\mapsto \dfrac{x-2}{x-1}$ $\qquad$ k_2: x $\mapsto 0{,}5\,x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$

b) Gib eine Funktion an, die alle obigen Bedingungen erfüllt.

Hinweis: Als Bearbeitungszeit für diese exemplarische Auswahl früherer Klausuraufgaben kann etwa **100 Minuten** veranschlagt werden!

Mathe Q11 - Lösungen zur Vorbereitung auf die 1. Klausur

Aufgabe 1

a) i) falsch $F' = f$ hat in $x = -0{,}5$ VZW von + nach −
d.h. rel. Max in $x = -0{,}5$

ii) richtig da $F'(-1) = f(-1) = 1{,}5$

b) $f'(1) = 2{,}5$ $P_1(1/2{,}5)$
$f'(0) = 0$ $P_2(0/0)$

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0$ da $y = 4$ waagr. Asymptote von F und damit geht Steigung gegen Null.

Aufgabe 2

$$f(x) = \frac{-3x^2+6}{x^2-9} = \frac{-3\cdot(x^2-2)}{(x-3)\cdot(x+3)}$$

a) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$

b) $-3\cdot(x^2-2) = 0$; $x^2 - 2 = 0$; $x^2 = 2$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

c) $f(-x) = \frac{-3(-x)^2+6}{(-x)^2-9} = \frac{-3x^2+6}{x^2-9} = f(x) \Rightarrow G_f$ achsensymm.

d) $x = 3$ $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 3} \frac{-3\cdot(x^2-2)}{(x+3)} \cdot \frac{1}{\underbrace{(x-3)}_{\to 0+}} = -\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 3} f(x) = +\infty$ da $x = 3$ Polstelle ungerader Ordng

$x = -3$ $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -3} f(x) = +\infty$ (Symmetrie)

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -3} f(x) = -\infty$ (Symmetrie od. Pol ung. Ordng)

$x \to \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^2+6}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(-3+\overbrace{\frac{6}{x^2}}^{\to 0}\right)}{x^2\left(1-\underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}\right)} = \frac{-3}{1} = -3$

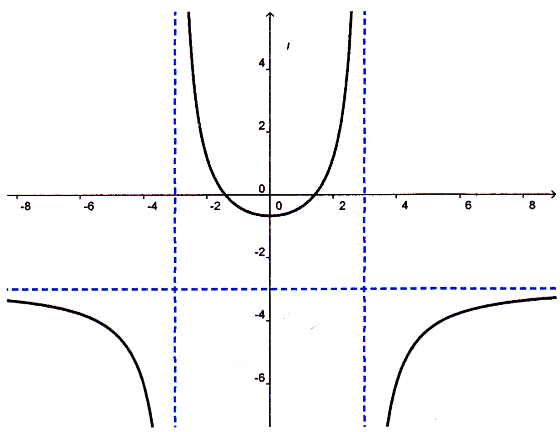
Asymptoten: $y = -3$; $x = 3$; $x = -3$

e) $f'(x) = \frac{-6x\cdot(x^2-9)-(-3x^2+6)\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-6x^3+54x+6x^3-12x}{(x^2-9)^2} = \frac{42x}{\underbrace{(x^2-9)^2}_{+}}$

$f'(x) = 0$ für $x = 0$

	−3		0		3	
$42x$	−		−	+		+
f'	−		−	+		+
G_f	↘		↘	↗		↗

f streng mon. steigend für $x \in [0; 3[$; $]3; \infty[$
f streng mon. fallend für $x \in]-\infty; -3[$; $]-3; 0]$
$\Rightarrow$ f hat in $x = 0$ rel. Minimum



$f(0) = \frac{-6}{-9} = -\frac{2}{3}$

Min $\left(0/-\frac{2}{3}\right)$

Aufgabe 3 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1-6}{20-14} = \underline{\underline{-\frac{5}{6}}}$

positiv: Temperatur steigt an ; negativ: Temperatur nimmt ab

Aufgabe 5

Die Funktion f: $x \mapsto \frac{1}{x}$ besitzt im Punkt P (1 | 1) die Tangente t.

a) Zeige rechnerisch, dass für diese Gerade t folgende Gleichung gilt: $y = 2 - x$

$f'(x) = -1/x^2$ $f'(1) = -1$ $t(1) = -1 + t = 1$ also $t = 2$

Die Funktion f besitzt eine weitere Tangente h, die parallel zur Gerade t verläuft.

b) Zeige rechnerisch, dass diese Gerade h den Graphen von f im Punkt Q (-1 | -1) schneidet.

$f'(-1) = -1$ $f(-1) = -1$

Die Normale n im Punkt P verläuft senkrecht zu den Geraden t und h.

c) Bestimme die Zuordnungsvorschrift der zugehörigen Funktion n.

$m = 1$, $m_1 \cdot m_2 = -1$ sein muss. also $y = x + t$ $n(1) = 1$, also $t = 0$ n: $x \mapsto 1x$

d) Bestimme rechnerisch, wie weit die beiden Parallelen t und h von einander entfernt sind.

$d = (2^2 + 2^2)^{0,5} = 2 \cdot 2^{0,5} \approx 2,83$

Aufgabe 6

Es soll eine gebrochenrationale Funktion k gefunden werden, deren Graph die x-Achse bei x = 2 schneidet und Asymptoten mit den Gleichungen x = 1 und y = 0,5 x + 1 besitzt.

a) Begründe jeweils kurz, warum die beiden folgenden Funktionen hierfür nicht in Frage kommen:

k_1: $x \mapsto \frac{x-2}{x-1}$ k_1 besitzt keine schräge Asymptote

k_2: $x \mapsto 0{,}5\,x + 1 + \frac{1}{x-1}$ k_2 besitzt keine Nullstelle bei $x = 2$

b) Gib die Zuordnungsvorschrift einer Funktion k an, die alle obigen Bedingungen erfüllt.

k: $x \mapsto 0{,}5\,x + 1 - \frac{2}{x-1}$