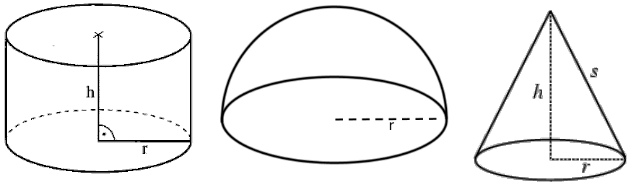
E4	Übung Raumgeometrie

Viele mathematische Körper können in die geometrischen Grundkörper (Prisma, Zylinder, Kegel, Pyramide und Kugel) zerlegt werden.
Für die Grundkörper sollten die Formeln zur Oberflächen- und Volumenberechnung bekannt sein.

1) Vergleich der Körper
Für die folgenden Körper gilt, dass die Höhe h dem Radius r entspricht.



a) Berechne die Oberfläche für r=5cm.
b) Zeige, dass die Volumina von Zylinder, Halbkugel und Kegel im Verhältnis 3:2:1 stehen.

2) Auf einer Waage liegt eine Messingkugel mit dem Umfang von 35cm. Die Waage zeigt exakt 1,9 kg. Zeige, dass die Messingkugel innen hohl ist.

> Die Dichte ρ ist der Quotient aus der Masse m eines Körpers und seinem Volumen V.
> Messing hat die Dichte $\rho=8{,}3\,g/cm^3$

3) Pyramiden...
a) Eine gerade Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck (a=3cm) als Grundfläche hat die Höhe h=4cm. Berechne das Volumen.
b) Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche (a=4cm) hat die Höhe h=3cm.
- Berechne den Neigungswinkel zwischen Seitenkante und Grundfläche.
- Berechne den Neigungswinkel zwischen Seitenfläche und Grundfläche.

E4	Lösung Raumgeometrie	☐☐☐☐

1a)
$O_{Zylinder}=2G+M=2\pi r^2+2\pi r\cdot h=2\pi r^2+2\pi r\cdot r=4\pi r^2=4\pi(5cm)^2=100\pi cm^2\approx 314cm^2$

$O_{Halbkugel}=\frac{1}{2}\,O_{Kugel}+A_{Kreis}=\frac{1}{2}\cdot 4\pi r^2+\pi r^2=3\pi r^2=3\pi(5cm)^2=75\,\pi cm^2\approx 236cm^2$

$O_{Kegel}=G+M=\pi r^2+\pi rs=\pi r^2+\sqrt{2}\,\pi r^2=\pi(5cm)^2+\sqrt{2}\,\pi(5cm)^2\approx 190cm^2$

NR: $r^2+h^2=s^2$ für h= r folgt: $r^2+r^2=s^2 \rightarrow s=\sqrt{2}\,r$

b)
$V_{Zylinder}=G\cdot h=\pi r^2\cdot r=\pi r^3$

$V_{Halbkugel}=\frac{1}{2}\cdot V_{Kugel}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi r^3$

$V_{Kegel}=\frac{1}{3}G\cdot h=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot r=\frac{1}{3}\pi r^3$

$\rightarrow V_{Zylinder}:V_{Halbkugel}:V_{Kegel}\ \hat{=}\ \pi r^3:\frac{2}{3}\pi r^3:\frac{1}{3}\pi r^3\ \hat{=}\ 1:\frac{2}{3}:\frac{1}{3}\ \hat{=}\ 3:2:1$

2)Um dies zu zeigen, kann man z.B. das Gewicht einer Vollkugel berechnen.

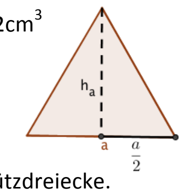
$V_{Kugel}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{35cm}{2\pi}\right)^3\approx 724cm^3$

$m=V\cdot\rho=724cm^3\cdot 8{,}3g/cm^3=6009g=6{,}01kg$
Die Kugel auf der Waage ist leichter als eine Vollkugel aus Messing → Sie ist innen hohl.

NR: Der Radius kann aus dem Umfang wie folgt berechnet werden:
$u=2\pi r \quad \rightarrow r=\frac{u}{2\pi}=\frac{35cm}{2\pi}\approx 5{,}57cm$

3)
a) $V_{Pyramide}=\frac{1}{3}Gh=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a\cdot h_a\right)\cdot h=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 3cm\cdot\sqrt{6{,}75}\ cm\right)\cdot 4cm=5{,}2cm^3$

h_a erhält man mit dem Satz des Pythagoras:
$h_a^2+(1{,}5cm)^2=(3cm)^2\rightarrow h_a=\sqrt{6{,}75}cm$



b) Um Neigungswinkel zu berechnen, nutzt man rechtwinklige Stützdreiecke.
- Betrachte das Dreieck AMS (M = Schnittpunkt der Diagonalen d des Quadrats)

$\tan\alpha=\frac{h}{0{,}5d}\rightarrow \tan\alpha=\frac{3cm}{0{,}5\sqrt{32}}\rightarrow \alpha\approx 46{,}69°$

(d erhält man mit dem Satz des Pythagoras $d^2=a^2+a^2$)
- Betrachte das Dreieck PMS

$\tan\varepsilon=\frac{h}{0{,}5a}\rightarrow \tan\varepsilon=\frac{3cm}{0{,}5\cdot 4cm}\rightarrow \varepsilon\approx 56{,}31°$