Musterbeispiel einer Kurvendiskussion $f(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3$

Quelle: BSV11 Seite 48/49

◊ Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ ganzrationale Funktion!

◊ Symmetrie keine, da gerade und ungerade Exponenten

(oder: $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$)

◊ Verhalten im Unendlichen

$\lim\limits_{x \to \pm} \underbrace{\frac{1}{16}x^4}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{1}{4}x^3}_{\to +\infty} = +\infty$

oder: ganzrationale Funktion vom Grad 4 mit pos. Vorfaktor vor der höchsten Potenz

◊ Schnittpunkte mit Koordinatenachsen

$f(0) = 0 \Rightarrow S_1(0|0)$ SP mit x- und y-Achse

$f(x) = 0$ für $x = 0$ (dreifach) und $x = -4$ (einfach) $\Rightarrow S_2(-4|0)$ SP mit x-Achse

! Nullstelle ≠ Schnittpunkt mit x-Achse!

◊ Extremstellen/ Extrempunkte

$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2(x+3) = 0$ für $x = 0$ (doppelt $\Rightarrow$ keine Extremstelle)

$x = -3$ (einfach $\Rightarrow$ Extremstelle)

$f''(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$

$f''(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ keine Extremstelle; Terrassenpunkt $(0|0)$

$f''(-3) = \frac{9}{4} > 0 \Rightarrow$ rel. Minimum für $x = -3$; Tiefpunkt $(-3|-\frac{27}{16})$

$\approx -1{,}7$ → Zeichnung!

◊ Wertemenge wg. $W = [-\frac{27}{16}; \infty[$

◊ größtmöglichen Intervalle, in denen der Graph links- bzw. rechtsgekrümmt ist

Ränder dabei!

$f''(x) = \frac{3}{4}x(x+2) = 0$ für $x = 0$ und $x = -2$

Skizze: f'' + − + ; −2 0

linksgekrümmt für $x \in]-\infty; -2] \cup [0; \infty[$

rechtsgekrümmt für $x \in [-2; 0]$

◊ Wendestellen/ Wendepunkte

wg. Krümmungswechsel:

Wendestellen: $x = 0$, $x = 2$

Wendepunkte: $W_1(0|0)$ (Terrassenpunkt, s. oben)

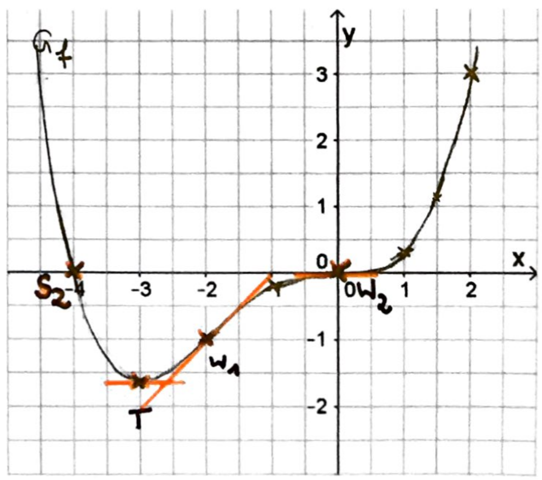
$W_2(-2|-1)$ $f(-2) = -1$!

◊ Wendetangenten

in $(0|0)$: $y = 0$ (da $t = 0$; $m = f'(0) = 0$)

in $(-2|-1)$: $\left.\begin{array}{l} -1 = f'(-2)\cdot(-2) + t \\ f'(-2) = 1 \end{array}\right\}$ $t = 1$

$y = x + 1$



◊ Zeichnung, die die bisherigen Ergebnisse erhält

Nullstellen; Tiefpunkt, Wendepunkte

bekannte Tangenten; evtl. weitere Punkte z.B. $(2|3)$