Station 1: Geradengleichung aufstellen

Bestimmen Sie die Parametergleichung der Geraden g, die durch die beiden Punkte A(1|-2|0) und B(4|0|6) verläuft.

# Lösung des Beispiels:

## Richtungsvektor bestimmen:

Als Richtungsvektor kann man den Vektor $\vec{v} =\vec{AB}$ wählen:

$$\vec{v} =\left(\begin{matrix}4-1\\0+2\\6-0\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}3\\2\\6\end{matrix}\right)$$

## Aufpunkt wählen:

Als Aufpunkt kann man den Ortsvektor von A oder B wählen.

## Geradengleichung in Parameterform

$$g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}1\\-2\\0\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}3\\2\\6\end{matrix}\right)$$

# Aufgabe:

Bestimmen Sie die Parametergleichung der Geraden, die jeweils durch die Punkte A und B verläuft.

1. A(1|2|-3); B(0|2|3)
2. A(7|4|-5); B(-2|2|-2)

Station 2: Geradengleichung aufstellen

Gegeben ist die Geraden $g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}-2\\3\\0\end{matrix}\right)$. Bestimmen Sie eine Gerade h, die senkrecht zur Geraden g verläuft und denselben Aufpunkt besitzt.

# Lösung des Beispiels:

## Richtungsvektor bestimmen:

Die beiden Richtungsvektoren müssen senkrecht stehen. Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ stehen senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt:

$$\vec{v}∘\vec{u} =\left(\begin{matrix}-2\\3\\0\end{matrix}\right)∘\left(\begin{matrix}u\_{1}\\u\_{2}\\u\_{3}\end{matrix}\right)=0$$

Wählen wir für u die Koordinaten $\left(\begin{matrix}3\\2\\0\end{matrix}\right)$ ergibt sich für das Skalarprodukt

$$\vec{v}∘\vec{u} =\left(\begin{matrix}-2\\3\\0\end{matrix}\right)∘\left(\begin{matrix}3\\2\\0\end{matrix}\right)=-6+6+0=0$$

## Geradengleichung in Parameterform

$$g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}3\\2\\0\end{matrix}\right)$$

# Aufgabe:

1. Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden h, die parallel zur Geraden

 $g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}-2\\2\\1\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}3\\-3\\4\end{matrix}\right)$ durch den Punkt P(0|2|-2) verläuft.

1. Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden k, die senkrecht zur Geraden

 $g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}-2\\2\\1\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}3\\-3\\4\end{matrix}\right)$ durch den Punkt A(-2|2|1) verläuft.

Station 3: Punkt auf Gerade

Gegeben ist die Geraden $g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}-2\\3\\1\end{matrix}\right)$. Überprüfen Sie, ob der Punkt P(-9|17|8) auf der Geraden g liegt

# Lösung des Beispiels:

Gesucht ist ein Wert für $λ$, so das gilt: $\left(\begin{matrix}-9\\17\\8\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}-2\\3\\1\end{matrix}\right)$.

Dies führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{matrix}I) -9=1+λ⋅\left(-2\right) \\II) 17=2+λ⋅3\\III) 8=3+λ⋅1\end{matrix}$$

Aus Gleichung I) folgt $λ = 5$. Erfüllt dieser Wert die beiden anderen Gleichungen liegt der Punkt auf g, ansonsten nicht.

$λ =5 in II): $ $2+5⋅3=17$ Gleichung II) erfüllt

$λ =5 in III): $ $2+5⋅1=8$ Gleichung III) erfüllt

$⇒$ P liegt auf der Geraden g

# Aufgabe:

1. Gegeben ist die Geraden $g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}-2\\2\\1\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}3\\-3\\4\end{matrix}\right)$ . Prüfen Sie rechnerisch, ob die Punkte A(7|-7|9) und B(-8|8|-7) auf der Geraden g liegen.
2. Geben Sie zwei beliebige Punkte P und Q an, die auf der Geraden g liegen.

Station 4: Schnittpunkte mit Koordinatenebenen

Gegeben ist die Geraden $g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}-2\\3\\1\end{matrix}\right)$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden g mit den Koordinatenebenen. Diese Punkte bezeichnet man als **Spurpunkte**.

# Lösung des Beispiels:

**Schnittpunkt mit der**$ x\_{1}x\_{2}-Ebene$**:**

Für alle Punkte in dieser Ebene gilt: $x\_{3} =0$, also auch für den Schnittpunkt der Geraden g mit dieser Ebene.

$$⇒ 0=3+λ⋅ 1 ⇒ λ =-3$$

Einsetzen von $λ =-3$ in die Geradengleichung liefert gesuchten Schnittpunkt:

$$\left(\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)+\left(-3\right)⋅\left(\begin{matrix}-2\\3\\1\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}7\\-7\\0\end{matrix}\right) ⇒ S\_{12}(7\left|-7\right|0)$$

**Schnittpunkt mit der**$ x\_{2}x\_{3}-Ebene$**:**

$$⇒ 0=1+λ⋅(-2) ⇒ λ =0,5$$

Einsetzen von $λ =0,5$ in die Geradengleichung liefert gesuchten Schnittpunkt:

$$\left(\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)+0,5⋅\left(\begin{matrix}-2\\3\\1\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0\\4,5\\3,5\end{matrix}\right) ⇒ S\_{23}(0\left|4,5\right|3,5)$$

**Schnittpunkt mit der**$ x\_{1}x\_{3}-Ebene$**:**

$$⇒ 0=2+λ⋅3 ⇒ λ =-\frac{2}{3}$$

Einsetzen von $λ =-\frac{2}{3}$ in die Geradengleichung liefert gesuchten Schnittpunkt:

$$\left(\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)-\frac{2}{3}⋅\left(\begin{matrix}-2\\3\\1\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{7}{3}\\0\\\frac{7}{3}\end{matrix}\right) ⇒ S\_{13}\left(\frac{7}{3}\left|0\right|\frac{7}{3} \right)$$

# Aufgabe:

Gegeben ist die Geraden $g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}5\\2\\-2\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}2\\-2\\4\end{matrix}\right)$ . Berechnen Sie die Spurpunkte der Geraden g.

Station 5: Parameterform und Koordinatendarstellung

Im 2-dim Koordinatensystem stellen wir Geradengleichungen auch in der Form $y=m⋅x+t$. Mit den neuen Achsenbeschriftungen erhalten wir $x\_{2}= m⋅x\_{1}+t$. (Koordinatendarstellung)

Bestimme die Koordinatendarstellung der Geraden $g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right)$.

# Lösung des Beispiels:

Kennen wir zwei Punkte auf der Geraden, können wir der Geradengleichung der Form $x\_{2}= m⋅x\_{1}+t$ bestimmen.

1. Zwei Punkte auf g bestimmen:

A(1|2) (Aufpunkt)

B(3|-1) Für $λ =1$ erhält man: $\vec{b} = \left(\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right)+1⋅\left(\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right)$

1. Steigung berechnen:

$$m=\frac{3-1}{-1-2}=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$$

1. Y-Achsenabschnitt berechnen

$$2=-\frac{2}{3}⋅1+t⇒ t=\frac{8}{3}$$

1. Koordinatendarstellung notieren

$$x\_{2}= -\frac{2}{3}⋅x\_{1}+\frac{8}{3}$$

# Aufgabe:

1. Gegeben ist die Geraden $g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}-5\\5\end{matrix}\right)$. Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung der Geraden g.
2. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden g mit den Koordinatenachsen.

Station 6: Besondere Lage im Koordinatensystem

Öffnen Sie den Link: <https://tube.geogebra.org/book/title/id/bb4Llibz> und öffnen Sie das GeoGebra-Applet im 1. Kapitel: Besondere Lage im Koordinatensystem.

Gezeigt werden die vier Geraden:

$$\vec{X}=λ⋅\left(\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}\right), \vec{X}=\left(\begin{matrix}0\\2\\1\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix}\right), \vec{X}=λ⋅\left(\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right), \vec{X}=\left(\begin{matrix}-2\\2\\3\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right)$$

Beschreiben Sie die Lage der vier Geraden im Koordinatensystem. Wie lässt sich die besondere Lage der Geraden an der Parameterform erkennen. Versuche allgemeine Regeln zu formulieren.

**Eine Gerade ist parallel zur**

* $x\_{1}$**-Achse, wenn …**
* $x\_{2}$**-Achse, wenn …**
* $x\_{3}$**-Achse, wenn …**

**Eine Gerade verläuft in der**

* $x\_{1}x\_{2}-Ebene$**, wenn …**
* $x\_{2}x\_{3}-Ebene$**, wenn …**
* $x\_{1}x\_{3}-Ebene$**, wenn …**

# Aufgabe:

1. Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die parallel zur $x\_{1}$-Achse verläuft.
2. Geben Sie die Gleichung der Winkelhalbierenden der $x\_{1}$- und $x\_{2}$-Achse an.
3. Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die in der $x\_{1}x\_{2}-Ebene$ verläuft, aber nicht die Winkelhalbierende ist.

Station 7: Gegenseitige Lage von Geraden

Öffnen Sie den Link: <https://tube.geogebra.org/book/title/id/bb4Llibz> und öffnen Sie das 2. Kapitel: Gegenseitige Lage von Geraden.

Betrachten Sie nacheinander die Aufträge in den GeoGebra-Applets 1 bis 4.

Zeichnen Sie die Tabelle ab und vervollständigen Sie diese, indem Sie die vier möglichen gegenseitigen Lagen der Geraden passend zuordnen.

**Wir betrachten die beiden Geraden** $g:\vec{X}=\vec{a}+λ⋅\vec{u}$ **und** $h:\vec{X}=\vec{b}+μ⋅\vec{v}$

|  |  |
| --- | --- |
| **Richtungsvektoren** $\vec{u}$ **und** $\vec{v}$ **sind linear abhängig** | **Richtungsvektoren** $\vec{u}$ **und** $\vec{v}$ **sind linear unabhängig** |
| Die beiden Geraden sind … | Die beiden Geraden … |
| Die beiden Geraden sind … | Die beiden Geraden … |

# Aufgaben:

1. Begründe, dass die beiden Geraden $g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}2\\4\\1\end{matrix}\right)$ und $h:\vec{X}=\left(\begin{matrix}3\\6\\4\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}4\\8\\2\end{matrix}\right)$ identisch sind.
2. Begründe, dass die beiden Geraden $g:\vec{X}=\left(\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}2\\-2\\1\end{matrix}\right)$ und $h:\vec{X}=\left(\begin{matrix}2\\5\\1\end{matrix}\right)+λ⋅\left(\begin{matrix}5\\-5\\2,5\end{matrix}\right)$ parallel sind, aber nicht identisch.